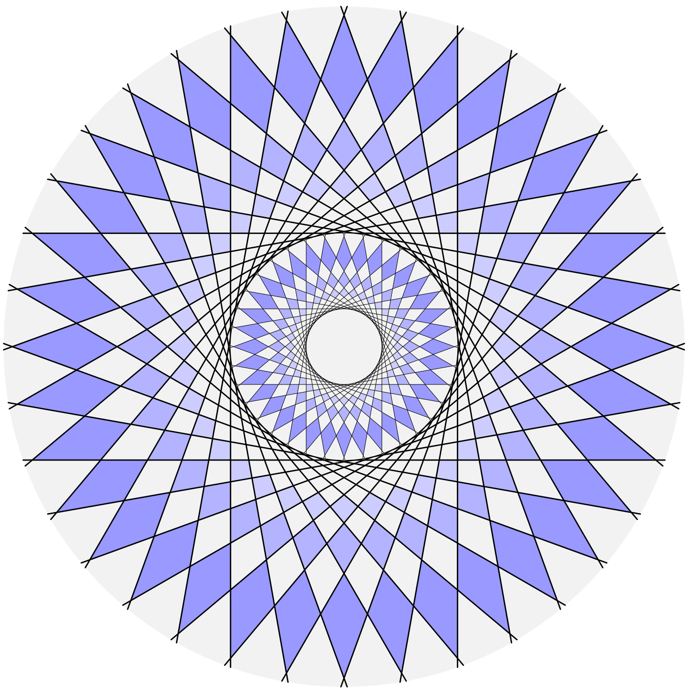
数学分析讲义

梅加强　编著



无厚，不可积也，其大千里。

— 惠施，公元前四世纪。

前言

数学分析的核心内容是微积分。微积分的发展大体上经过了三个阶段。牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）在继承公元 15–16 世纪以来许多杰出数学家的成果的基础上，将微积分发展成了一门独立的学问，微积分被用来解决天文、力学、工程等方面的大量实际问题。19 世纪初，由于科学技术进步的推动，为微积分建立牢固基础的要求十分迫切。经过近二百年的努力，到 19 世纪五六十年代，柯西（Cauchy）, 黎曼（Riemann）和魏尔斯特拉斯（Weierstrass）等建立了严格的极限理论，并用极限的语言严格地证明了微积分的所有定义和定理，为微积分的普及创立了更加有利的条件。到 20 世纪初，格拉斯曼（Grassmann），庞加莱（Poincaré）和嘉当（Cartan）等人又发展了外微分形式的语言，并利用外微分形式的语言把微分和积分这一对矛盾统一在斯托克斯（Stokes）积分公式中，这就使得牛顿和莱布尼兹的微积分基本公式达到了一个统一的新高度，以后的发展就属于近代数学的范畴了。

本书在内容的编排上试图展现微积分发展各阶段的重要成果，并适当地采用现代数学的思想方法和观点处理经典的分析问题。下面对本书主要内容作一简要介绍。由于数学分析是非常成熟的一门基础课程，我们只着重于介绍和传统教材有较大差别的地方。

在第一章中我们介绍了集合与映射的一些基本概念。这一章虽然是复习性质的，但我们还是引入了确界和可数这两个重要概念。我们把确界原理作为一元分析的基础，在第二章关于数列极限的论述中这一点显得特别突出。实数的构造以及实数系的基本性质对于一元分析来说是非常重要的，但为了减轻负担，我们将实数构造的理论放在第一章附录中了。

第三章研究连续函数。和传统教材不同的是，我们在这里就已经介绍了连续函数的积分了。这样，在第四章中，我们就很快得到了微积分的基本定理 —Newton-Leibniz 公式，从而不定积分的内容就显得较为自然。微分中值定理和 Taylor 展开是一元微分学发展的一个高峰，我们在第五章中介绍这部分内容。

第六章和第七章是一元函数积分的内容。Riemann 积分是一元分析的一个难点。由于前面已经有连续函数的积分，Riemann 积分的理解难度有所降低。为了透彻地理解 Riemann 积分，我们还引入了零测集的概念，利用它刻画了可积函数。

第八、九和第十章是关于无穷级数理论的，这是分析学的经典内容。其中，关于数项级数，我们突出了 Kummer 判别法的作用，由此简化了众多收敛发散判别法的叙述。我们在这几章的最后一节中讨论了一些进一步的内容，如级数用于近似计算，Euler-Maclaurin 公式以及 Stirling 公式的渐近展开，Fourier 级数的平均收敛和一致收敛性，以及对于等分布问题和等周问题的应用等。对于 Fourier 级数中重

要的 Parseval 等式，我们所用的证明方法和传统的教材也有所不同。

第十一章是承前继后的一章。我们将实数的基本性质提炼出来，引入了内积空间和度量空间的概念，并通过完备性，紧致性和连通性等刻画了连续映射的基本性质。与度量空间有关的内容十分丰富，我们在这里只挑选了最必需的若干概念和定理，一方面将一元分析中所获得的概念做了一些提升，另一方面为多元分析准备扎实的基础。当然，在课时有限的情况下也可将所有的论述局限于欧氏空间。

第十二章是多元函数的微分学。这一章对于线性代数的要求较高，读者应当具备线性映射、线性变换的基础知识。究其原因，是因为微分学的基本手法无非是作线性化，线性代数的语言很自然地要用上。比如，在这一章里，无论是拟微分中值定理，还是逆映射定理，隐映射定理，甚至是 Lagrange 乘数法，它们的严格表述和证明都是用线性代数的语言完成的，其中 Jacobian 矩阵起了突出的作用。

第十三章是多元函数的 Riemann 积分。和一元函数一样，我们也是用零测集刻画可积函数乃至可求面积（体积）集的。除了强调计算以外，我们还给出了多重积分变量代换公式的完整证明，这个证明通常是被省略的。我们的证明和其它一些教材上的也不相同。

第十四章是曲线曲面上的积分。我们实际上统一处理了欧氏空间中正则子流形上的积分。关于 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式，我们没有采用分割积分区域为较简单区域的传统办法，而宁愿使用区域变换的观点讨论问题。这一章的附录中介绍了重要的 Riemann-Stieltjes 积分，它们是在考虑可求长曲线时自然出现的。作为应用，通过考虑 Riemann-Stieltjes 积分我们还得到了 Riemann 积分的中值公式，分部积分公式和变量替换公式的最一般情形。

第十五章部分地反映了微积分发展的第三阶段的成果，我们引入了微分形式，外微分运算，并给出了整体曲面的定义，讨论了曲面的定向，最后统一了 Green 公式，Gauss 公式和曲面上的 Stokes 公式。

第十六章讨论含参变量的积分。其中，关于 Gamma 函数的 Stirling 公式的证明，我们提供了两个办法，它们和传统教材上的处理方法也不太一样。最后，我们还讨论了 Fourier 变换的乘积公式，反演公式和 Plancherel 公式，并讨论了 Fourier 分析的几个重要应用。

本书作为讲义的形式曾在南京大学数学系多次试用，在试用过程中，程健、胡泽春、尤建功和张高飞等诸位老师都贡献了宝贵的意见和建议；扬州大学徐海峰博士也仔细校订了本书前五章初稿，作者在此一并致谢。

总体而言，本书的基本内容仍然属于经典的微积分范畴。在取材方面我们着重理论和应用，在定理的证明方面我们着重自然和简洁。限于作者的水平，如有处理得不恰当的地方还请专家予以批评指正。

目 录

第六章　Riemann 积分

我们在第三章中已经介绍了连续函数在闭区间上的积分. 在实际应用中, 往往也需要考虑非连续函数如何积分的问题. 例如, 函数 $f(x) = 1$, $x \in [0, 1)$; $f(x) = 2$, $x \in [1, 2]$ 在区间 $[0, 2]$ 上有一个间断点, 但 $f(x)$ 的图像和三条直线 $x = 0$, $x = 2$ 以及 $y = 0$ 所围成的区域仍然是可以求面积的, 即 $f(x)$ 在某种意义下也应该可积. Riemann 研究了有界函数的积分, 他把可积函数类从连续函数类做了很大的扩充. Lebesgue 进一步发现可积函数就是 “几乎处处” 连续的函数.

§6.1　Riemann 可积

设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的函数 (不一定连续), 考虑由直线 $x = a$, $y = b$, $y = 0$ 及曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形. 受连续函数积分定义的启发, 为了计算它的面积, 我们用若干小矩形面积之和去逼近: 将 $[a, b]$ 分割为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

第 i 个小梯形的面积可用 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似逼近, 其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 于是和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 表示曲边梯形 ABCD 的面积的近似值. 我们期望, 当 $[a, b]$ 的分割越来越细时, 这个近似值越来越接近所求面积, 用极限表示出来就是

$$S_{ABCD} = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

这里 $\|\pi\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\}$. 如果上述极限存在, 则记为 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

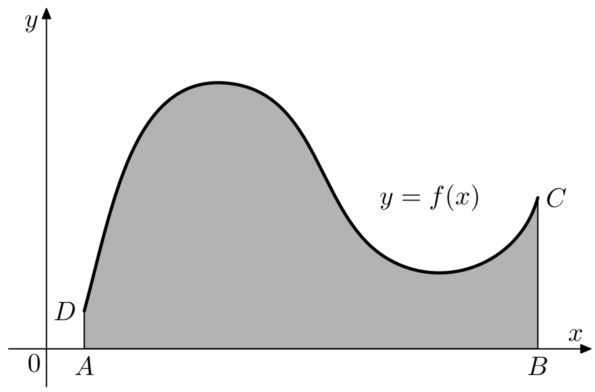


图 6.1　曲边梯形的面积

详细说来, 设函数 $f(x)$ 定义于区间 $[a,b]$, $[a,b]$ 中有 $n+1$ 个点依次为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 它们将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 这些分点及小区间构成了 $[a,b]$ 的一个分割, 记为

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 并记

$$\|\pi\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\},$$

称为分割 π 的模.

对于分割 π, 任取点 $\xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 称

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 和或积分和.

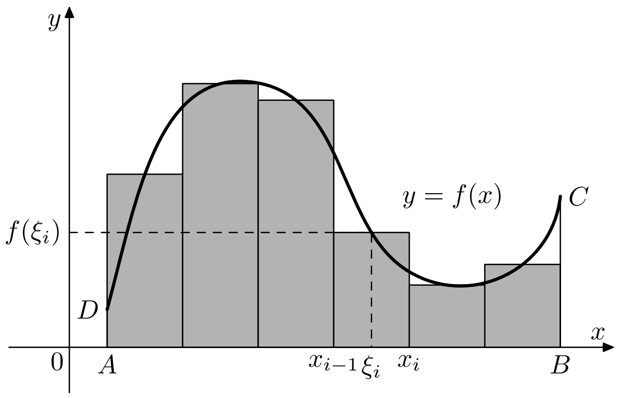


图 6.2 Riemann 和

定义 6.1.1 (Riemann 积分)**.** *设 f 如上, 如果存在实数 I, 使得任给 $\varepsilon>0$, 均存在 $\delta>0$, 对任何分割 π, 只要 $\|\pi\|<\delta$, 就有*

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\Big|<\varepsilon,\quad \forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,\cdots,n,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积或可积, I 为 f 在 $[a,b]$ 上的(定)积分, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中 f 称为被积函数, $[a,b]$ 称为积分区间, a,b 分别称为积分下限与积分上限.

注. (1) 积分与变量 x 的选择无关, 即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

(2) 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 是惟一确定的; 根据第三章第五节的讨论可知连续函数总是可积的.

定理 6.1.1 (可积的必要条件)**.** *若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界, 反之不然.*

证明. 假设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 沿用上面的记号, 记 I 为其积分. 取 $\varepsilon=1$, 由定义, 存在 $\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 均有

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I\Big|<1.$$

特别地, 取自然数 $n>\dfrac{b-a}{\delta}$, 对区间 $[a,b]$ 做 n 等分, 即

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),\quad i=0,\cdots,n,$$

此时 $\|\pi\|=\dfrac{b-a}{n}<\delta$. 我们有

$$\Big|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)-I\Big|<1,\quad \forall\ \xi_i\in\Big[a+\frac{i-1}{n}(b-a),\ a+\frac{i}{n}(b-a)\Big],$$

从而

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Big|\leqslant\frac{n}{b-a}(1+|I|).$$

对于固定的 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 当 $i\neq j$ 时, 我们取 $\xi_i=a+\dfrac{i}{n}(b-a)$, 令

$$M=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\Big\{\Big|f\Big(a+\frac{i}{n}(b-a)\Big)\Big|\Big\},$$

则有如下估计:

$$\begin{aligned}|f(\xi_j)|&\leqslant\Big|\sum_{i\neq j}f\Big(a+\frac{i}{n}(b-a)\Big)\Big|+\frac{n}{b-a}(1+|I|)\\&\leqslant(n-1)M+\frac{n}{b-a}(1+|I|),\end{aligned}$$

这个估计对任意 $\xi_j \in \big[a+\dfrac{j-1}{a}(b-a), a+\dfrac{j}{a}(b-a)\big]$ 均成立, 因此有

$$|f(x)| \leqslant (n-1)M + \frac{n}{b-a}(1+|I|), \quad \forall\, x \in [a,b],$$

这就说明 f 有界.

有界函数未必可积, Dirichlet 函数 $D(x)$ 即为例子: 任给一个分割, 当 ξ_i 取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的无理数时, 积分和为 0; 当 ξ_i 取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中有理数时, 积分和为 1. 因此 $D(x)$ 的积分和没有极限. □

除了连续函数之外, 还有哪些有界函数是可积的呢? 如同研究有界数列的收敛性要考虑上极限和下极限一样, 我们考虑有界函数 Riemann 和的 "最大" 值和 "最小" 值. 对于分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记 $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, 令

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i,$$

我们称 S 为 f 关于 π 的 Darboux 上和, 简称上和, 也记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$; 而 s 称为 Darboux 下和, 简称下和, 也记为 $s(\pi)$ 或 $s(\pi, f)$.

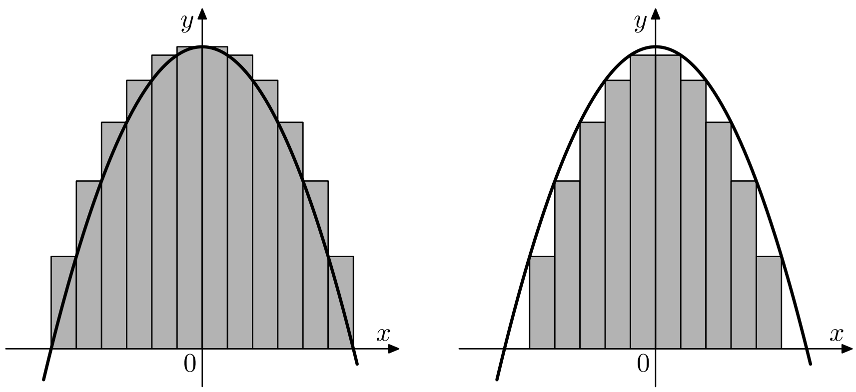


图 6.3 上和与下和

显然, 任何 Riemann 和总是介于下和与上和之间. 跟第三章一样, 我们称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 由定义, 上和与下和之差可以表示为

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

Riemann 对于积分的贡献之一就是证明了 f 可积当且仅当 $S-s$ 的极限为零 (当分割的模趋于零时). Darboux 进一步研究了任意有界函数的上和与下和的极限.

以下总是假定 f 为有界函数, 并记 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.

下面的引理给出了上和与下和的重要性质, 这种单调性质与数列的情形类似.

引理 6.1.2. 设分割 π' 是从 π 添加 k 个分点得到的, 则有

$$S(\pi)\geqslant S(\pi')\geqslant S(\pi)-(M-m)k\|\pi\|,$$
$$s(\pi)\leqslant s(\pi')\leqslant s(\pi)+(M-m)k\|\pi\|.$$

特别地, 对于给定的分割增加新的分点时, 下和不减, 上和不增.

证明. 为了简单起见, 我们证明 $k=1$ 的情形. 此时, 设新添加的分点为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x}$ 必落在某个区间 (x_{j-1},x_j) 内. 由上和的定义,

$$S(\pi)=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i=M_j\cdot\Delta x_j+\sum_{i\neq j}M_i\cdot\Delta x_i,$$
$$S(\pi')=M_j'\cdot(\bar{x}-x_{j-1})+M_j''(x_j-\bar{x})+\sum_{i\neq j}M_i\cdot\Delta x_i,$$

这里 M_j' 及 M_j'' 分别是 f 在区间 $[x_{j-1},\bar{x}]$ 及 $[\bar{x},x_j]$ 中的上确界. 因为 $M_j'\leqslant M_j$, $M_j''\leqslant M_j$, 从而有

$$\begin{aligned}0\leqslant S(\pi)-S(\pi')&=(M_j-M_j')(\bar{x}-x_{j-1})+(M_j-M_j'')(x_j-\bar{x})\\&\leqslant(M-m)(\bar{x}-x_{j-1})+(M-m)(x_j-\bar{x})\\&=(M-m)\Delta x_j\leqslant(M-m)\|\pi\|.\end{aligned}$$

即 $S(\pi)\geqslant S(\pi')\geqslant S(\pi)-(M-m)\|\pi\|$. 下和的情形同理可证. □

推论 6.1.3. 对于任意两个分割 π_1 及 π_2, 有

$$s(\pi_1)\leqslant S(\pi_2).$$

证明. 用 $\pi_1\cup\pi_2$ 表示将 π_1 和 π_2 的所有分点合并后得到的分割 (重复的分点只取一次), 则 $\pi_1\cup\pi_2$ 既可以看成由 π_1 添加分点而来, 又可以看作从 π_2 添加分点而来. 由引理 6.1.2, 有

$$s(\pi_1)\leqslant s(\pi_1\cup\pi_2)\leqslant S(\pi_1\cup\pi_2)\leqslant S(\pi_2).$$

这也就是说任意下和总是不超过任意上和. □

下面的定理和有界数列的上极限和下极限都存在也是类似的.

定理 6.1.4 (Darboux)**.** $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf\limits_{\pi} S(\pi)$, $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup\limits_{\pi} s(\pi)$.

证明. 根据定义, 总有下面的估计:

$$m(b-a) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant M(b-a),$$

因此 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 和 $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 都存在.

任给 $\varepsilon > 0$, 由下确界的定义知, 存在分割 π', 使得

$$S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 π' 由 k 个分点构成. 对于任意另一分割 π, $\pi \cup \pi'$ 至多比 π 多 k 个分点. 由引理 6.1.2, 有

$$S(\pi) - (M-m)k\|\pi\| \leqslant S(\pi \cup \pi') \leqslant S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $\|\pi\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2(M-m+1)k}$ 时,

$$\begin{aligned}\inf_{\pi} S(\pi) \leqslant S(\pi) &\leqslant (M-m)k\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k} + \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}\\ &< \inf_{\pi} S(\pi) + \varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi).$$

下和的极限同理可证. □

我们称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的上积分, $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的下积分. Riemann 和 Darboux 关于函数可积性的结果反映在下面的重要定理中, 它可对比于数列极限相应的定理 **??**.

定理 6.1.5 (可积的充要条件)**.** *设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则以下命题等价:*

(1) *f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.*

(2) *f 在 $[a,b]$ 上的上积分和下积分相等.*

(3) $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i = 0$.

(4) *任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的某个分割 π, 使得*

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2): 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 其积分为 I. 于是任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i < I + \varepsilon.$$

特别地, 我们得到

$$\begin{aligned} I-\varepsilon &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot\Delta x_i = s(\pi) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot\Delta x_i = S(\pi) \\ &\leqslant I+\varepsilon, \end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \lim\limits_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = I$. 由 Darboux 定理即知 f 的上下积分相等.

(2) $\Longrightarrow$ (1): 设 $\sup\limits_{\pi} s(\pi) = \inf\limits_{\pi} S(\pi) = I$. 由 Darboux 定理, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$I-\varepsilon < s(\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \leqslant S(\pi) < I+\varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = I,$$

也就是说 f 在 $[a,b]$ 上可积, 积分为 I.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3): 这可由 Darboux 定理及下式得到

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i = \lim_{\|\pi\|\to 0}(S(\pi)-s(\pi)) = \inf_{\pi} S(\pi) - \sup_{\pi} s(\pi).$$

(3) $\Longrightarrow$ (4): 这是显然的.

(4) $\Longrightarrow$ (2): 如果存在分割 π, 使得 $S(\pi)-s(\pi)<\varepsilon$, 则由

$$s(\pi)\leqslant \sup_{\pi'} s(\pi') \leqslant \inf_{\pi'} S(\pi') \leqslant S(\pi)$$

知

$$0 \leqslant \inf_{\pi'} S(\pi') - \sup_{\pi'} s(\pi') \leqslant S(\pi)-s(\pi) < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性即知 f 的上和与下和相等.

这就证明了 (1) (2) (3) (4) 的等价性. □

推论 6.1.6. (1) 设 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积.

(2) 设 $c\in(a,b)$, 如果 f 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明. (1) 任给 $\varepsilon>0$, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 由定理 6.1.5 (3), 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i<\varepsilon$. 取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 π', 使得 $\|\pi'\|<\delta$. 显然, 可构造 $[a,b]$ 的分割 π, 使得 π 是 π' 通过添加 $[a,b]-[\alpha,\beta]$ 中的分点得到, 且 $\|\pi\|<\delta$, 则

$$\sum_{\pi'}\omega_i\cdot\Delta x_i \leqslant \sum_{\pi}\omega_i\cdot\Delta x_i < \varepsilon.$$

由定理 6.1.5 (4) 知, f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

(2) 用定理 6.1.5 (4) 很容易证明, 留作习题. □

例 6.1.1. *设 f,g 均为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 fg 也是 $[a,b]$ 上的可积函数.*

证明. 因为可积函数是有界的, 故存在 $K>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant K,\quad |g(x)|\leqslant K,\quad \forall\, x\in[a,b].$$

任给 $\varepsilon>0$, 由定理 6.1.5 (3), 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时,

$$\sum_{\pi}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2K+1},\quad \sum_{\pi}\omega_i(g)\cdot\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

如果 $[x_{i-1},x_i]$ 为 π 中的一个小区间, 则

$$\begin{aligned}\omega_i(fg)&=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')g(x')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')|\\&\leqslant\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\big[|f(x')||g(x')-g(x'')|+|g(x'')||f(x')-f(x'')|\big]\\&\leqslant K(\omega_i(g)+\omega_i(f)),\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{\pi}\omega_i(fg)\cdot\Delta x_i&\leqslant K\sum_{\pi}(\omega_i(f)+\omega_i(g))\cdot\Delta x_i\\&=K\sum_{\pi}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i+K\sum_{\pi}\omega_i(g)\cdot\Delta x_i\\&<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K+1}+K\cdot\frac{\varepsilon}{2K+1}<\varepsilon.\end{aligned}$$

由定理 6.1.5 知 fg 可积. □

根据定理 6.1.5 可以得到几类可积函数, 它们不一定总是连续的.

定理 6.1.7 (可积函数类)**.** *(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积;*

(2) 若有界函数 f 只在 $[a,b]$ 中有限个点处不连续, 则 f 可积;

(3) 若 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 可积;

证明. (1) 见第三章第五节 (**??**).

(2) 我们用定理 6.1.5 (4) 来证明. 任给 $\varepsilon>0$, 设 $\bar{x}_k$ $(k=1,\cdots,N)$ 为 f 的间断点, 取 $0<\rho<\dfrac{\varepsilon}{4(M-m+1)N}$, 使得 $(\bar{x}_k-\rho,\bar{x}_k+\rho)$ $(k=1,\cdots,N)$ 互不相交. 去掉这些开区间后, $[a,b]$ 剩下的部分由有限个闭区间组成, 且 f 在这些闭区间上连续. 根据闭区间上连续函数的一致连续性, 可以取这些闭区间的分割, 使得

f 在每个小区间上的振幅均小于 $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 这些闭区间的分割连同 $[\bar{x}_k-\rho, \bar{x}_k+\rho]$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$ 组成了 $[a,b]$ 的分割, 记为 π. 对于此分割, 有

$$\begin{aligned} S(\pi)-s(\pi) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+(M-m)\sum_{i=1}^{N}2\rho \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+(M-m)\frac{2N\varepsilon}{4(M-m+1)N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (4) 知 f 可积.

(3) 设 f 为 $[a,b]$ 上单调函数, 不妨设 f 单调递增. 任给 $\varepsilon > 0$, 任取 $[a,b]$ 的分割 π, 使得 $\|\pi\| < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\cdot \Delta x_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} \\ &= \big(f(x_n)-f(x_0)\big)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} \\ &= \big(f(b)-f(a)\big)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (3) 知 f 可积. □

设 f 为 $[a,b]$ 上定义的函数, 如果存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得 f 在每一个小区间 (x_{i-1}, x_i) 中均为常数, 则称 f 为**阶梯函数**.

推论 6.1.8. 阶梯函数均为可积函数.

证明. 这是因为阶梯函数至多只有有限个间断点. □

例 6.1.2. $(*)$ $[0,1]$ 上的黎曼函数是可积的.

证明. 黎曼函数 $R(x)$ 定义为

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in (0,1),\ p, q \text{ 为互素正整数}, \\ 1, & x = 0, 1, \\ 0, & x \in (0,1) \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

显然, $0 \leqslant R(x) \leqslant 1$. 任给 $\varepsilon > 0$, 当 $\dfrac{1}{q} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, 即 $q \leqslant \dfrac{2}{\varepsilon}$ 时, $[0,1]$ 中形如 $\dfrac{p}{q}$ 的既约分数不超过 $N = N(\varepsilon)$ 个. 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4N}$, 对于 $\|\pi\| < \delta$ 的任意分割, 包含上述既约分数

的小区间至多只有 $2N$ 个, 在其余的小区间上 $R(x)$ 的取值均小于 $\frac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$0 \leqslant \sum_i R(\xi_i)\Delta x_i \leqslant 2N\|\pi\| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon,$$

这说明 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且积分为零. □

从上面的讨论中可以体会到, 要说明 f 为可积函数, 我们只要找到某个分割, 使得要么 f 在此分割中的小区间上的振幅很小, 要么振幅较大的那些小区间的总长度很小. 这可以总结为下面的结果.

定理 6.1.9 (Riemann). *设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则 f 可积的充分必要条件是任给 $\varepsilon,\eta > 0$, 存在 $[a,b]$ 的某个分割 π, 使得*

$$\sum_{\omega_i \geqslant \eta} \Delta x_i < \varepsilon.$$

证明. (必要性) 设 f 可积, 则由定理 6.1.5 (4), 任给 $\varepsilon,\eta > 0$, 存在分割 π, 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \eta,$$

从而

$$\eta \cdot \sum_{\omega_i \geqslant \eta} \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \eta,$$

其中上式左端表示对振幅大于或等于 η 的区间求和, 即有

$$\sum_{\omega_i \geqslant \eta} \Delta x_i < \varepsilon.$$

(充分性) 由已知条件, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 π, 使得

$$\sum_{\omega_i \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)}.$$

对于这个分割, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \omega_i \cdot \Delta x_i + \sum_{\omega_i \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \omega_i \cdot \Delta x_i \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i + (M-m) \sum_{\omega_i \geqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m+1)} < \varepsilon.\end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (4) 知 f 可积. □

例 6.1.3. $(*)$ 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$. 则 $f\circ\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上仍可积.

证明. 因为 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故一致连续. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$. 因为 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 由定理 6.1.9, 存在 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $\pi:\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$, 使得

$$\sum_{\omega_i(\varphi)\geqslant\delta}\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{4K+1},$$

其中 $K=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i&=\sum_{\omega_i(\varphi)\geqslant\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i+\sum_{\omega_i(\varphi)<\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i\\&\leqslant 2K\cdot\sum_{\omega_i(\varphi)\geqslant\delta}\Delta t_i+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot\sum_{\omega_i(\varphi)<\delta}\Delta t_i\\&\leqslant 2K\cdot\frac{\varepsilon}{4K+1}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)<\varepsilon.\end{aligned}$$

由定理 6.1.5 (4) 知 $f\circ\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积. □

注. 如果条件改为 f 可积, φ 连续, 则复合函数 $f(\varphi)$ 未必可积 (有反例).

在本节最后, 我们简要介绍一下 Lebesgue 关于可积函数的进一步刻画.

定义 6.1.2 (零测集)**.** 设 $A\subset\mathbb{R}$, 如果任给 $\varepsilon>0$, 均存在覆盖 A 的至多可数个开区间 $\{I_i\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}|I_i|\leqslant\varepsilon,\quad\forall\ n\geqslant 1,$$

则称 A 为零测集.

例 6.1.4. (1) 有限集是零测集; (2) 可数集是零测集; (3) 零测集的子集仍为零测集; (4) 可数个零测集之并仍为零测集.

证明. (1) 设 $A=\{x_i\}_{i=1}^n$ 为有限点集, 任给 $\varepsilon>0$, 记

$$I_i=\big(x_i-\frac{\varepsilon}{2n},\ x_i+\frac{\varepsilon}{2n}\big),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

显然, $\{I_i\}$ 组成了 A 的一个覆盖, 且这些开区间的长度之和为

$$\sum_{i=1}^{n}|I_i|=\sum_{i=1}^{n}2\frac{\varepsilon}{2n}=\varepsilon,$$

因此 A 为零测集.

(2) 设 $A = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为可数点集, 任给 $\varepsilon > 0$, 记

$$I_i = \big(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\big),\quad i = 1, 2, \cdots.$$

显然, $\{I_i\}$ 组成了 A 的一个覆盖, 且

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| = \sum_{i=1}^{n} 2\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon,$$

因此 A 为零测集.

(3) 按定义, 这是显然的.

(4) 设 A_i $(i \geqslant 1)$ 为一列零测集. 于是任给 $\varepsilon > 0$, 对于固定的 i, 存在 A_i 的开区间覆盖 $\{I_{ij}\}$, 使得 $\{I_{ij}\}$ 中任意有限个区间的长度之和均不超过 $\frac{\varepsilon}{2^i}$. 因为可数个可数集合的并集仍是可数的, 故所有这些开区间 $\{I_{ij}\}$ 仍组成了 $\{A_i\}$ 的并集的覆盖, 且任意有限个开区间的长度和不超过

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \cdots \leqslant \varepsilon.$$

因此 $\{A_i\}$ 的并集仍为零测集. □

现在设 f 为 $[a, b]$ 上的有界函数. 我们回忆一下, 函数 f 在 $x \in [a, b]$ 处的振幅定义为

$$\omega(f, x) = \lim_{r \to 0^+} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (x - r, x + r) \cap [a, b]\}.$$

f 在 x 处连续当且仅当 $\omega(f, x) = 0$. 设 $\delta > 0$, 记

$$D_\delta = \{x \in [a, b] \,|\, \omega(f, x) \geqslant \delta\},$$

则 f 的不连续点 (间断点) 全体为 $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$.

定理 6.1.10 (Lebsegue)**.** *有界函数 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是它的不连续点集 D_f 为零测集.*

证明. (必要性) 设 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. 固定 $\delta > 0$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \frac{\delta}{2}.$$

如果 $x \in D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i)$, 则显然 $\omega_i \geqslant \omega(f, x) \geqslant \delta$. 因此从上式可得

$$\sum_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \varnothing} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然

$$D_\delta \subset \bigcup_{D_\delta\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing}(x_{i-1},x_i)\bigcup_{i=0}^{n}\big(x_i-\frac{\varepsilon}{4(n+1)},\ x_i+\frac{\varepsilon}{4(n+1)}\big),$$

且

$$\sum_{D_\delta\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing}\Delta x_i+\frac{2\varepsilon}{4(n+1)}\cdot(n+1)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

由定义即知 D_δ 为零测集. 这说明 $Df=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}D_{\frac{1}{n}}$ 为零测集.

(充分性) 设 $|f(x)|\leqslant K$, $\forall\ x\in[a,b]$. 由假设, D_f 为零测集, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在开区间 $\{(\alpha_j,\beta_j)|j=1,2,\cdots\}$, 使得 $D_f\subset\bigcup\limits_j(\alpha_j,\beta_j)$, 且

$$\sum_j(\beta_j-\alpha_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{4K+1}.$$

对于 $x\in[a,b]-\bigcup\limits_j(\alpha_j,\beta_j)$, 因为 f 在 x 处连续, 故存在包含 x 的开区间 I_x, 使得 f 在 I_x 上的振幅小于 $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 由于 $\{(\alpha_j,\beta_j),\ I_x\}$ 为紧致集 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 它有有限子覆盖, 且由下面的 Lebesgue 数引理, 可取 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得每一个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 必含于某个 (α_j,β_j) 或 I_x 中. 此时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i&\leqslant\sum_{[x_{i-1},x_i]\subset(\alpha_j,\beta_j)}\omega_i\cdot\Delta x_i+\sum_{[x_{i-1},x_i]\subset I_x}\omega_i\cdot\Delta x_i\\&\leqslant 2K\sum_{[x_{i-1},x_i]\subset(\alpha_j,\beta_j)}\Delta x_i+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{[x_{i-1},x_i]\subset I_x}\Delta x_i\\&\leqslant 2K\sum_j(\beta_j-\alpha_j)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)\\&\leqslant 2K\frac{\varepsilon}{4K+1}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. □

引理 6.1.11 (Lebesgue 数). *设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 则存在正数 $\lambda>0$, 使得任何长度不超过 λ 的闭区间 $I\subset[a,b]$ 必定完全包含于某个开集 U_α 中.*

证明. (反证法) 如果不然, 则存在一列闭区间 I_n, $n=1,2,\cdots$, 使得 $|I_n|<\dfrac{1}{n}$, 但 I_n 均不是任何 U_α 的子集. 记 $I_n=[a_n,b_n]$, 由于 $\{a_n\}$ 为有界点列, 从而必有收敛子列, 不妨设 $\{a_n\}$ 本身收敛, 其极限记为 $\xi\in[a,b]$. 显然, $\{b_n\}$ 也收敛到 ξ. 因

为 $\{U_\alpha\}$ 为 $[a,b]$ 的开覆盖, 故存在某个 α, 使得 $\xi \in U_\alpha$. 又因为 U_α 为开集, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $(\xi-\delta,\xi+\delta) \subset U_\alpha$. 这说明, 当 n 充分大时, 有

$$a_n, b_n \in (\xi-\delta,\xi+\delta) \subset U_\alpha,$$

此时 $I_n = [a_n,b_n] \subset U_\alpha$. 这与 I_n 的选取相矛盾. □

利用 Lebesgue 定理重新判断本节定理和例子中函数的可积性就显得较简单了, 请读者自行完成.

习题 6.1

1. 判断下列函数在 $[0,1]$ 上的可积性:

$$(1)\ f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}. \end{cases} \qquad (2)\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$(3)\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad (4)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x+c)$ 在 $[a-c,\ b-c]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx.$$

3. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right| dx; \qquad (2)\ \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 与 $f(x)$ 只在有限个点处不同, 则 $g(x)$ 也可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且 $\int_0^1 f(x)dx = A > 0$. 证明, 存在子区间 $[\alpha,\beta]$, 使得 $f(x) > \frac{1}{2}A$, $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$. (提示: 用反证法估计上和.)

6. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负可积函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 证明, 任给 $\varepsilon > 0$, 均存在子区间 $[\alpha,\beta]$, 使得 $f(x) < \varepsilon$, $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$.

7. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 如果存在一个分割, 使得关于该分割的上和与下和相等, 则 f 为常值函数.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且存在常数 $C>0$, 使得 $|f(x)|\geqslant C$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 证明 $\dfrac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则函数
$$\underline{f}(x)=\inf_{t\in[a,x]}\{f(t)\},\quad \overline{f}(x)=\sup_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$$
也是 $[a,b]$ 上的可积函数.

10. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在至多可数个点处不相等, 则
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$$

11. $(*)$ 设 $f(x)>0$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx>0$.

12. $(*)$ 证明任何 (非退化的) 区间均不是零测集.

13. $(*)$ 设 f,g 均为可积函数, 如果 f 与 g 只在一个零测集上不相等, 则它们的积分相等. (提示: 用上题, 考虑任意积分和.)

14. $(*)$ 设 f 可积, 有界函数 g 与 f 只在一个闭的零测集上不相等, 则 g 也是可积的, 且它们的积分相等.

§6.2 定积分的性质

为了方便起见, 我们约定
$$\text{当 } a<b \text{ 时},\quad \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx,$$
$$\text{当 } a=b \text{ 时},\quad \int_a^b f(x)dx=0.$$

定理 6.2.1. (1) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 则 $\lambda f+\mu g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且
$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)dx=\lambda\cdot\int_a^b f(x)dx+\mu\cdot\int_a^b g(x)dx.$$
(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, $c\in(a,b)$, 则 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积, 且
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

证明. (1) 任给 $\varepsilon > 0$, 由 f, g 可积知, 存在 $\delta > 0$, 当 $[a, b]$ 的分割 π 满足 $\|\pi\| < \delta$ 时

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\Big| < \varepsilon, \quad \Big|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\cdot\Delta x_i - \int_a^b g(x)dx\Big| < \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^n [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)]\cdot\Delta x_i - \Big(\lambda\cdot\int_a^b f(x)dx + \mu\cdot\int_a^b g(x)dx\Big)\Big| \\
&\leqslant |\lambda|\cdot\Big|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i - \int_a^b f(x)dx\Big| + |\mu|\cdot\Big|\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\cdot\Delta x_i - \int_a^b g(x)dx\Big| \\
&\leqslant |\lambda|\cdot\varepsilon + |\mu|\cdot\varepsilon = (|\lambda| + |\mu|)\cdot\varepsilon,
\end{aligned}$$

根据积分的定义知, $\lambda f + \mu g$ 可积, 且积分为

$$\lambda\cdot\int_a^b f(x)dx + \mu\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

(2) 在前节已证 f 在小区间上也可积. 设 π_1, π_2 分别是 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 的分割, 当 $\|\pi_1\| \to 0$, $\|\pi_2\| \to 0$ 时, $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ 也满足条件 $\|\pi\| \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\substack{\|\pi_1\|\to 0\\ \|\pi_2\|\to 0}} \sum_{\pi_1\cup\pi_2} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{\|\pi_1\|\to 0}\sum_{\pi_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|\pi_2\|\to 0}\sum_{\pi_2} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

注. 根据本节开头的约定, 如果 a, b, c 属于 f 的某可积区间, 则不论它们的相对位置如何, (2) 中等式仍成立.

定理 6.2.2. (1) 设 f 为 $[a, b]$ 上的非负可积函数, 则其积分非负;
(2) 如果 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

(3) 如果 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 也可积, 且

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

证明. (1) 如果 f 非负可积, 则其积分和总是非负的, 从而积分非负.
(2) 由定理 6.2.1 (1), $f - g$ 在 $[a, b]$ 上可积, 由 (1) 知

$$0 \leqslant \int_a^b (f - g)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 π 满足

$$\sum_{\pi}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i<\varepsilon.$$

因为 $\big||f(x)|-|f(y)|\big|\leqslant|f(x)-f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)$, 从而

$$\sum_{\pi}\omega_i(|f|)\cdot\Delta x_i<\varepsilon,$$

这说明 $|f|$ 可积. 因为

$$\Big|\sum_{\pi}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\Big|\leqslant\sum_{\pi}|f(\xi_i)|\cdot\Delta x_i,$$

取极限知

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.$$

下面的结果是连续函数的积分中值定理的推广.

定理 6.2.3 (积分第一中值定理). 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

证明. 不失一般性, 可设 $g(x)\geqslant 0$. 则

$$\big(\inf_{x\in[a,b]}f(x)\big)g(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant\big(\sup_{x\in[a,b]}f(x)\big)g(x).$$

由定理 6.2.2 知

$$\inf_{x\in[a,b]}f(x)\cdot\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant\sup_{x\in[a,b]}f(x)\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

上式说明, 如果 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=0$, 此时定理当然成立. 不然, 令 $\mu=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}$, 则 $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. □

注. 中值定理又称中值公式. 当 $g(x)\equiv 1$ 时,

$$\int_a^b f(x)dx=\mu\cdot(b-a).$$

引理 6.2.4. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证明. 与第三章第五节例 **??** 完全一样, 略. □

定理 6.2.5 (积分第二中值定理)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(1) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall\ x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall\ x\in[a,b]$, 则存在 $\eta\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\cdot\int_\eta^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果 g 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\zeta f(x)dx+g(b)\cdot\int_\zeta^b f(x)dx.$$

证明. (1) 记 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$. 由引理 6.2.4 知 F 连续, 故达到最大值 M 和最小值 m. 又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界. 设 $|f(x)|\leqslant K$, $\forall\ x\in[a,b]$. 因为 g 单调递减, 由前节结论, g 可积. 从而任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 $\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(g)\cdot\Delta x_i<\varepsilon.$$

因此有 (注意 $F(x_0)=F(a)=0$)

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)dx\\
&=\sum_{i-1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]\cdot f(x)dx+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|\cdot|f(x)|dx+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot[F(x_i)-F(x_{i-1})]\\
&\leqslant K\cdot\sum_{i=1}^n\omega_i(g)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)\cdot[g(x_{i-1})-g(x_i)]+F(b)\cdot g(x_{n-1})\\
&\leqslant K\cdot\varepsilon+M\cdot\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1})-g(x_i)]+M\cdot g(x_{n-1})\\
&=K\cdot\varepsilon+M\cdot g(a).
\end{aligned}$$

对于 $-f(x)$, 上式成为 (注意 $-F$ 的最大值是 $-m$)

$$\int_a^b -f(x)\cdot g(x)dx \leqslant K\cdot\varepsilon - m\cdot g(a),$$

结合以上两个不等式, 得到

$$m\cdot g(a) - K\cdot\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\cdot g(a) + K\cdot\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 有

$$m\cdot g(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\cdot g(a).$$

如果 $g(a)=0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. 如果 $g(a)>0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)} \leqslant M,$$

由连续函数的介值定理, 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $F(\xi) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)}$. 即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\cdot F(\xi) = g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 令 $\tilde{F}(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$, $\tilde{F}$ 的最大值记为 $\tilde{M}$. 与 (1) 类似, 有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x)-g(x_i)]f(x)dx + \sum_{i=1}^n g(x_i)\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\
&\leqslant K\cdot\sum_{i=1}^n \omega_i(g)\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i)[\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\
&\leqslant K\cdot\varepsilon + g(x_1)\cdot\tilde{F}(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1}\tilde{F}(x_i)[g(x_{i+1})-g(x_i)] \\
&\leqslant K\cdot\varepsilon + \tilde{M}\cdot g(x_1) + \tilde{M}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i+1})-g(x_i)] \\
&= K\cdot\varepsilon + \tilde{M}\cdot g(b).
\end{aligned}$$

剩下的证明和 (1) 类似.

(3) 先设 g 单调递减, 令 $h(x) = g(x) - g(b)$, 则 h 单调递减, 且 $h \geqslant 0$. 由 (1), 存在 $\zeta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = h(a) \cdot \int_a^\zeta f(x) dx.$$

将 $h(x) = g(x) - g(b)$ 代入上式, 化简即得欲证结论. g 单调递增的情况留作习题. □

注. 在定理的证明过程中用到了求和的 Abel 变换技巧, 进一步的讨论和应用请参见第八章第三节.

例 6.2.1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$

证明. 当 $x \in [0,1]$ 时, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$, 故 $\frac{1}{2}x^n \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx.$$

$n \to +\infty$ 时, 上式两边极限为 0. 本例也可以用第一中值公式证明. □

例 6.2.2. 设 $\beta \geqslant 0$, $b > a > 0$, 证明

$$\Big| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} \, dx \Big| \leqslant \frac{2}{a}.$$

证明. 对 $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ 用积分第二中值公式, 此时存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} \cdot \int_a^\xi \sin x \, dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}(\cos a - \cos \xi),$$

这说明

$$\Big| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} \, dx \Big| \leqslant 2\frac{e^{-\beta a}}{a} \leqslant \frac{2}{a},$$

欲证结果成立. □

例 6.2.3. 证明 $\lim\limits_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ 存在.

证明. 在上例中取 $\beta = 0$, 则当 $B > A > 0$ 时, 有

$$\Big| \int_0^B \frac{\sin x}{x} \, dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x} \, dx \Big| = \Big| \int_A^B \frac{\sin x}{x} \, dx \Big| \leqslant \frac{2}{A} \to 0 \quad (A \to \infty),$$

由 Cauchy 收敛准则即知欲证极限存在. □

例 6.2.4. (*) 证明区间不是零测集.

证明. 只要对闭区间证明就可以了. 设闭区间 $[a,b]$ 被有限个区间 $\{I_i\}$ 所覆盖, 不妨设 I_i 均包含于 $[a,b]$. 记 χ_i 为 I_i 的特征函数, 即

$$\chi_i(x)=1,\ \ 当\ x\in I_i;\ \ \chi_i(x)=0,\ \ 当\ x\notin I_i.$$

于是 χ_i 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 且

$$\int_a^b \chi_i(x)\,dx=|I_i|.$$

由 $\{I_i\}$ 覆盖 $[a,b]$ 可知

$$\sum_i \chi_i(x)\geqslant 1,\ \ \forall\ x\in[a,b].$$

因此有

$$\sum_i |I_i|=\sum_i\int_a^b \chi_i(x)\,dx=\int_a^b\sum_i \chi_i(x)\,dx\geqslant b-a.$$

如果 $[a,b]$ 被一列开区间覆盖, 则存在有限子覆盖, 于是上述论证表明这些开区间的长度之和不小于 $b-a$. 特别地, $[a,b]$ 不是零测集. □

例 6.2.5 (阶梯逼近). 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$$

证明. 因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

在 $[a,b]$ 上定义阶梯函数 g, 使得

$$g(x)=f(x_{i-1}),\ \ \forall\ x\in[x_{i-1},x_i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-g(x)|dx&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-g(x)|dx\\&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_{i-1})|dx\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\omega_i(f)dx\\&=\sum_{i=1}^n\omega_i(f)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 就是所求阶梯函数. □

注. 显然, 我们构造的阶梯函数还满足条件

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant g \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

例 6.2.6 (Riemann-Lebesgue). 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

证明. 以第一个极限为例. 因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K$, $\forall\, x \in [a,b]$. 于是当 $\lambda > \dfrac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x dx\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})]\sin\lambda x dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\sin\lambda x dx\Big| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})|\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\lambda x dx\Big| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}|\cos\lambda x_{i-1} - \cos\lambda x_i| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明第一个极限等式成立. 第二个极限等式同理可证. □

习题 6.2

1. 如果 f, g 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\max\{f,g\}$ 及 $\min\{f,g\}$ 均可积.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的函数. 如果 $f^2(x)$ 可积, 则 $|f(x)|$ 也可积.

3. 举例说明, 可积函数的复合不一定可积. (提示: 考虑符号函数和 Riemann 函数的复合.)

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 证明存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx.$$

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则有如下 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\Big[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

6. 设 $f(x) \geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\Big(\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\Big)^2 + \Big(\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\Big)^2 \leqslant \Big[\int_a^b f(x)\,dx\Big]^2.$$

(提示: $f = \sqrt{f}\cdot\sqrt{f}$, 用上题.)

7. 比较下列各题中积分的大小:

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx;\quad (2)\ \int_0^1 e^{-x}\,dx \text{ 与 } \int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

8. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的可积函数, 则 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

9. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 则 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$. (提示: nx^n 在 $[0,1]$ 上积分趋于 1, 在 $[0,\delta]$ 上很小, 如果 $0<\delta<1$.)

10. 证明:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = 0;\quad \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0\ (p>0).$$

11. $(*)$ 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$, 使得 $\inf f \leqslant g(x) \leqslant \sup f$, 且

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon.$$

12. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 设 $[a,b] \subset (c,d)$, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

13. $(*)$ 设 $a, b > 0$, $f(x)$ 在 $[-a,b]$ 上非负可积, 且 $\displaystyle\int_{-a}^b xf(x)dx = 0$, 则

$$\int_{-a}^b x^2 f(x)dx \leqslant ab\int_{-a}^b f(x)dx.$$

14. $(*)$ 设 $f(x), g(x)$ 为 $[a,b]$ 上同时单调递减或同时单调递增函数, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$$

§6.3 微积分基本公式

定理 6.3.1 (微积分基本定理)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导, 且*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

证明. 与定理 **??** 相同, 略. □

推论 6.3.2. *设 f 在 $[a,b]$ 上连续, $u(x):(c,d)\to[a,b]$ 与 $v(x):(c,d)\to[a,b]$ 为可微函数, 则有*

$$\Big(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\Big)' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

证明. 应用复合函数求导的链规则, 有

$$\begin{aligned}\Big(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt\Big)' &= \Big(\int_a^{u(x)} f(t)dt - \int_a^{v(x)} f(t)dt\Big)' \\ &= \Big(\int_a^{u} f(t)dt\Big)'\Big|_{u=u(x)} u'(x) - \Big(\int_a^{v(x)} f(t)dt\Big)'\Big|_{v=v(x)} v'(x) \\ &= f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).\end{aligned}$$

例 6.3.1. *设 $F(x) = \int_{-x}^{2x} \frac{\sin t}{t}dt$, 求 $F'(x)$ 及 $F'(0)$.*

解. 在 $t=0$ 处定义 $\frac{\sin t}{t}$ 为 1, 此时 $\frac{\sin t}{t}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 由上述推论可得

$$F'(x) = \frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2 - \frac{\sin(-x)}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}(\sin x + \sin 2x)$$

特别地, 当 $x=0$ 时, $F'(0) = 1+2 = 3$. □

定理 6.3.3 (Newton-Leibniz 公式)**.** *设 F 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F' = f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(此式又写为 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$).

证明. 任取 $[a,b]$ 的一个分割 $\pi:\ a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$, 由微分中值定理, 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i = 1,\cdots,n.$$

因此
$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$
因为 f 可积, 故当 $\|\pi\|\to 0$ 时上式右边趋于 $\int_a^b f(x)\,dx$, 这说明
$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$
这就证明了公式. □

注. (1) 本定理结论与第四章第三节相应的定理一样, 只是条件弱一些, 读者可比较两处的证明有何不同.

(2) 需要注意的是, 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数
$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
在 $[0,1]$ 上可微, 其导函数为
$$F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
这是无界函数, 因此不是 Riemann 可积的. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

例 6.3.2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=0$, 则
$$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx.$$

证明. 我们先来估计 $f^2(x)$:
$$\begin{aligned} f^2(x) &= \big(f(x)-f(a)\big)^2=\Big[\int_a^x f'(t)dt\Big]^2\\ &\leqslant \int_a^x[f'(t)]^2dt\int_a^x 1^2dt \qquad (\text{Cauchy}-\text{Schwarz})\\ &\leqslant (x-a)\int_a^b[f'(t)]^2dt,\end{aligned}$$
这说明
$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)dx &\leqslant \int_a^b(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2dt\,dx\\ &=\int_a^b[f'(t)]^2dt\,\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^b\\ &=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx.\end{aligned}$$

定理 6.3.4 (换元法)**.** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微, 且 $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

证明. 因为 f 连续, 由微积分基本定理, f 有原函数 F, 即 $F'(x)=f(x)$, 故

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

再由 Newton-Leibniz 公式,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt&=\int_\alpha^\beta[F(\varphi(t))]'dt\\&=F(\varphi(t))\big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\&=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

注. (1) 根据定理 6.3.3 可知, 关于 $\varphi(t)$ 的条件可以降低, 只要 $\varphi'(t)$ 可积, 则定理仍成立;

(2) 对于可积 (不一定连续) 的 f, 下面一般的换元公式仍成立:

(一般的换元法) 设函数 $g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积, 固定 $c\in[\alpha,\beta]$ 令 $G(x)=\displaystyle\int_c^x g(t)\,dt$, 则 G 为连续函数. 设 f 在区间 $G([\alpha,\beta])$ 上可积, $G(\alpha)=a$, $G(\beta)=b$, 则 $f(G(t))g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(G(t))g(t)dt.$$

我们来证明上述一般换元公式的一个特殊情形, 它对于大多数应用已经足够了, 一般的情形参见第十四章附录.

定理 6.3.5 (换元法之二)**.** (*) 设 φ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的单调可微函数, 且 φ' 可积. 如果 f 在区间 $\varphi([\alpha,\beta])$ 上可积, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 则 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证明. 不妨设 φ 是单调递增函数. 任取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割

$$\pi:\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,$$

则得到 $[a,b]$ 的一个如下分割

$$\pi':\ a=\varphi(\alpha)=x_0\leqslant\varphi(t_1)=x_1\leqslant\cdots\leqslant\varphi(t_n)=x_n=b,$$

这个分割中可能有相同的分点. 根据微分中值定理, 存在 $\zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$, 使得

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

特别地, 因为 φ' 可积, 从而是有界函数, 上式就表明当 $\|\pi\|$ 趋于零时, $\|\pi'\|$ 也趋于零. 由 φ 的单调性知 $\varphi(\zeta_i) \in [\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)] = [x_{i-1}, x_i]$, 因此下面的和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$$

仍为 f 在 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 和, 且

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) = \int_a^b f(x)dx.$$

另一方面, 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 考虑函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 关于分割 π 的 Riemann 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, 我们有如下估计

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\Big| \\
&\leqslant \Big|\sum_{i=1}^{n} [f(\varphi(\zeta_i)) - f(\varphi(\xi_i))](\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i))(\varphi'(\zeta_i) - \varphi'(\xi_i))(t_i - t_{i-1})\Big| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\varphi')\Delta t_i,
\end{aligned}$$

根据 f 和 φ' 的可积性可知, 当 $\|\pi\| \to 0$ 时上式最后的不等号的右端趋于零, 因此 $f(\varphi(t))\varphi(t)$ 的 Riemann 和收敛, 且极限为 f 在 $[a,b]$ 上的积分. □

定理 6.3.6 (分部积分). 设 $u(x)$, $v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且导函数可积, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

证明. 在题设条件下, 函数 $u(x)v'(x)$ 和 $u'(x)v(x)$ 都是可积的. 由定理 6.3.3 得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx \\
&= \int_a^b \big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\big)dx \\
&= \int_a^b (uv)'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.
\end{aligned}$$

定理得证. □

例 6.3.3. 求下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{t\cdot\sin 2t^2}{1+\sin t^2}dt$; (2) $\displaystyle\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx\ (a>0)$; (3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

解. (1) 因为

$$t\cdot\sin 2t^2=2t\sin t^2\cdot\cos t^2=\sin t^2\cdot(\sin t^2)',$$

故令 $x=\sin t^2$, 有

$$\text{积分}=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

(2) 令 $x=\dfrac{a}{\cos t}$, 当 x 从 a 变到 $2a$ 时, t 从 0 变到 $\dfrac{\pi}{3}$, 故

$$\text{积分}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{a^2}\sin^2 t\cdot\cos t dt=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

(3) 记

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx,\end{aligned}$$

对后一积分令 $x=\pi-t$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin t}{1+\cos^2 x}dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt,\end{aligned}$$

因此

$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\big(-\arctan(\cos t)\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例 6.3.4. 计算积分 $(m\in\mathbb{Z}^+)$

$$I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,\quad J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx.$$

解. 用分部积分法. 易见 $I_0=\pi/2$, $I_1=1$. 当 $m\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}I_m&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x\,d(\cos x)\\&=(-\sin^{m-1}x)(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(m-1)\sin^{m-2}x\cdot\cos^2 x\,dx\\&=(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m,\end{aligned}$$

因此 $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$. 从而有

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

同理可得

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

利用变换 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ 知 $J_m = I_m$. □

注. 注意到当 $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ 时, $\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x$, 因此有

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1},$$

代入上述计算结果, 得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

或改写为

$$\frac{1}{2n+1}\Big[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big]^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \Big[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big]^2 \frac{1}{2n},$$

上式两端之差小于 $\dfrac{1}{2n}\dfrac{\pi}{2}$, 故极限存在且为 $\dfrac{\pi}{2}$, 这就得到了下面的 Wallis 公式:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

例 6.3.5. 设 f 是周期为 T 的可积周期函数. 则对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

证明.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x) + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

最后的一项积分通过变换 $x = t + T$ 成为

$$\int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt,$$

代入前式就得到了等式的证明. □

例 6.3.6. $(*)$ 设 f 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b (b-x)f(x)dx,$$

其中

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

证明. 先设 f 连续. 此时 F 可导, 且 $F' = f$. 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)dx &= F(x)x\Big|_a^b - \int_a^b F'(x)xdx\\ &= bF(b) - \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (b-x)f(x)dx.\end{aligned}$$

对于一般的情形, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在连续函数 g, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leqslant \varepsilon.$$

此时, 令

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a,b],$$

则有

$$|F(x) - G(x)| = \Big|\int_a^x \big(f(t) - g(t)\big)dt\Big| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\ x \in [a,b],$$

并且

$$\int_a^b G(x)dx = \int_a^b (b-x)g(x)dx.$$

于是

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b F(x)dx - \int_a^b (b-x)f(x)dx\Big| &= \Big|\int_a^b \big(F(x) - G(x)\big)dx - \int_a^b (b-x)\big(f(x) - g(x)\big)dx\Big|\\ &\leqslant \int_a^b \big|F(x) - G(x)\big|dx + \int_a^b (b-x)|f(x) - g(x)|dx\\ &\leqslant (b-a)\varepsilon + (b-a)\int_a^b |f(x) - g(x)|dx\\ &\leqslant 2(b-a)\varepsilon,\end{aligned}$$

由 ε 的任意性即知欲证等式对 f 成立. □

习题 6.3

1. 求下列各导数:

$$(1)\ \frac{d}{dx}\int_0^{\cos^2 x} \sqrt{1+t^2}dt, \quad (2)\ \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^x \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}, \quad (3)\ \frac{d}{dx}\int_a^b \sin(x+t)dt.$$

2. 计算下列积分:

(1) $\int_0^\pi \cos^2 x dx$;	(2) $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx$;	(3) $\int_0^a \sqrt{a-x}\, dx$;
(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1+\cos x}$;	(5) $\int_0^\pi \sin^3 x\, dx$;	(6) $\int_{-\pi}^\pi x^2 \cos x\, dx$;
(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 4x\, dx$;	(8) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx$;	(9) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\, dx$.

3. 计算下面的积分, 并利用它们证明 $3+1/15<\pi<3+1/7$:

$$(1)\ \int_0^1 \frac{(1-x^2)x^4}{1+x^2}\,dx; \qquad (2)\ \int_0^1 \frac{(1-x)^4x^4}{1+x^2}\,dx.$$

4. 利用积分求下列极限:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2})$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi)$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$.

5. 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \sin^3 t dt; \quad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt; \quad (3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}} dt.$$

6. 设 m,n 为非零整数, 则

   (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=\pi$,

   (2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0 \quad (m\neq\pm n)$,

   (3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0$.

7. 用递推公式求下列积分 (m,n 为非负整数):

$$(1)\ \int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx; \qquad (2)\ \int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx; \qquad (3)\ \int_0^1(1-x^2)^n\,dx;$$

$$(4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx dx; \quad (5)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos nx dx; \quad (6)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x dx;$$

$$(7)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx; \qquad (8)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}dx; \qquad (9)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx.$$

8. 如果 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx,$$

   并利用这个等式计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

9. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx; \qquad (2)\ \int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx.$$

10. 设 $0 < \alpha, \beta < 1$, 证明

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\Big|\int_a^b f(x)dx\Big|.$$

(提示: 考虑 $(x-\frac{a+b}{2})f'(x)$ 的积分.)

13. 设 $f(x)$ 是周期为 T, 且在闭区间上可积的函数, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx.$$

14. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

15. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^1 \frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx = \pi f(0).$$

§6.4 定积分的近似计算

本节内容可以作为选读材料. 虽然利用微积分基本公式可以很方便地算出很多定积分, 但如果被积函数的原函数没有显式表示, 或者被积函数比较复杂, 直接利用微积分基本公式往往不太实际. 为此我们在本节介绍一些初步的近似计算方法, 并讨论误差估计.

(1) 矩形公式

设 f 为 $[a,b]$ 上的可积函数. 取 $c \in [a,b]$, 我们可以近似的用矩形的面积 $f(c)(b-a)$ 来估算 f 在 $[a,b]$ 上的积分. 为了估计误差, 设 f 可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M_1$, $\forall\, x \in (a,b)$. 由微分中值定理, 有

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a)\Big| &= \Big|\int_a^b (f(x)-f(c))dx\Big| = \Big|\int_a^b f'(\xi)(x-c)dx\Big| \\
&\leqslant \int_a^b |f'(\xi)||x-c|dx \leqslant M_1\int_a^b |x-c|dx \\
&= \frac{1}{2}M_1[(c-a)^2+(b-c)^2].
\end{aligned}$$

从上式可以看出, 当 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 时误差估计达到最优. 即有

$$\Big|\int_a^b f(x)dx-f\big(\frac{a+b}{2}\big)(b-a)\Big|\leqslant\frac{1}{4}M_1(b-a)^2. \tag{6.1}$$

注意到, 如果 f 为线性函数, 则上式左端为零 (即误差为零), 而右端并不能反映出这一点. 现在我们进一步设 f 二阶可微, 且 $|f''(x)|\leqslant M_2, \forall\, x\in[a,b]$. 将 f 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 处做 Taylor 展开, 得

$$f(x)=f\big(\frac{a+b}{2}\big)+f'\big(\frac{a+b}{2}\big)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)+\frac{1}{2}f''(\xi)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2,$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx=f\big(\frac{a+b}{2}\big)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2dx,$$

因此有

$$\Big|\int_a^b f(x)dx-f(\frac{a+b}{2})(b-a)\Big|\leqslant\frac{1}{2}M_2\int_a^b\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2dx=\frac{1}{24}M_2(b-a)^3. \tag{6.2}$$

一般地, 我们将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 在每一个小区间上均用矩形面积逼近积分, 即令

$$R_n=\sum_{i=1}^n f\big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\big)\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\big(a+\frac{2i-1}{n}(b-a)\big), \tag{6.3}$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上的矩形公式. 当 f 可微时, 误差估计为

$$\Big|\int_a^b f(x)dx-R_n\Big|\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{4}M_1\big(\frac{b-a}{n}\big)^2=\frac{M_1}{4n}(b-a)^2; \tag{6.4}$$

当 f 二阶可微时, 误差估计为

$$\Big|\int_a^b f(x)dx-R_n\Big|\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{24}M_2\big(\frac{b-a}{n}\big)^3=\frac{M_2}{24n^2}(b-a)^3. \tag{6.5}$$

(2) 梯形公式

设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果 f 二阶可微, 且 $|f''(x)|\leqslant M_2, \forall\, x\in[a,b]$, 则由第五章第四节 (**??**) 式可得

$$|f(x)-l(x)|\leqslant\frac{1}{2}M_2(x-a)(b-x),\quad x\in[a,b],$$

其中

$$l(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b),\quad x\in[a,b].$$

因此有

$$\int_a^b l(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

这也就是梯形面积公式. 我们有如下误差估计

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\Big| \leqslant \frac{1}{2}M_2\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{M_2}{12}(b-a)^3. \tag{6.6}$$

将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 在每一个小区间上均用梯形面积逼近积分, 则得到 f 的梯形公式

$$T_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n-1} f\big(a+\frac{i}{n}(b-a)\big) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\Big]. \tag{6.7}$$

相应地有误差估计

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - T_n\Big| \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{12}M_2\big(\frac{b-a}{n}\big)^3 = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3. \tag{6.8}$$

(3) Simpson 公式

设 f 三阶可微, 且 $|f'''(x)| \leqslant M_3$, $\forall\ x\in[a,b]$. 考虑经过平面上三点

$$(a,f(a)),\ \big(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\big),\ (b,f(b))$$

的抛物线, 即考虑满足条件

$$p_2(a)=f(a),\ p_2\big(\frac{a+b}{2}\big) = f\big(\frac{a+b}{2}\big),\ p_2(b)=f(b)$$

的二次插值多项式, 其表达式为

$$p_2(x) = \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f\big(\frac{a+b}{2}\big) + \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})}f(b),$$

直接的计算表明

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\big[f(a)+4f\big(\frac{a+b}{2}\big)+f(b)\big],$$

这是 f 在 $[a,b]$ 上的近似积分, 称为一次抛物线公式或 Simpson 公式. 根据插值多项式的余项公式, 有

$$f(x)-p_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)(x-b),\quad \xi\in(a,b).$$

因此

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\big[f(a)+4f\big(\frac{a+b}{2}\big)+f(b)\big]\Big|\\ \leqslant\ & \frac{1}{6}M_3\int_a^b (x-a)\Big|x-\frac{a+b}{2}\Big|(b-x)dx = \frac{M_3}{192}(b-a)^4.\end{aligned} \tag{6.9}$$

注意到

$$\int_a^b (x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)(x-b)dx = 0,$$

因此这个误差估计达不到最优. 下面假设 f 四阶可微. 我们选定常数 μ, 使得函数

$$g(x) = f(x) - p_2(x) - \mu(x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)(x-b)$$

在 $\dfrac{a+b}{2}$ 处的导数为零. 设 $c \neq a, \dfrac{a+b}{2}, b$. 考虑辅助函数

$$F(x) = g(x) - \frac{g(c)}{(c-a)(c-\frac{a+b}{2})^2(c-b)}(x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2(x-b),$$

于是 $F(a) = F(\frac{a+b}{2}) = F(b) = F(c) = 0$, $F'(\frac{a+b}{2}) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在三个不同的点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = F'(\xi_3) = 0,$$

这三个点与 $\dfrac{a+b}{2}$ 也不相同, 因此对 F' 继续重复使用 Rolle 定理, 就得到点 ξ, 使得 $F^{(4)}(\xi) = 0$. 即

$$f^{(4)}(\xi) - \frac{g(c)}{(c-a)(c-\frac{a+b}{2})^2(c-b)}4! = 0,$$

改写为 (c 换成 x)

$$g(x) = \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)(x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2(x-b),$$

在 $[a,b]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\big[f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\big]\\ &= \frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\xi)(x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2(x-b)dx,\end{aligned}$$

如果 $|f^{(4)}(x)| \leqslant M_4$, 则有下面的误差估计

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\big[f(a) + 4f\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(b)\big]\Big|\\ &\leqslant \frac{1}{24}M_4\int_a^b (x-a)\big(x-\frac{a+b}{2}\big)^2(b-x)dx = \frac{M_4}{180\times 2^4}(b-a)^5. \qquad (6.10)\end{aligned}$$

我们也可以将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 在每个小区间上用抛物线逼近函数得到一般的 Simpson 公式:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{6n}\big[f(x_{i-1}) + 4f\big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\big) + f(x_i)\big]. \qquad (6.11)$$

误差估计分别如下. 当 f 三阶可微时,

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - S_n\Big| \leqslant \frac{M_3}{192n^3}(b-a)^4; \tag{6.12}$$

当 f 四阶可微时,

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - S_n\Big| \leqslant \frac{M_4}{180(2n)^4}(b-a)^5. \tag{6.13}$$

(4) Newton-Cotes 公式

我们可以将上述积分的近似逼近过程继续做下去, 即用高阶插值多项式来逼近 f. 例如, 将区间 $[a,b]$ 分为 m 等分, 分点为

$$x_i = a + \frac{i}{m}(b-a), \quad i = 0, 1, \cdots, m.$$

考虑在 $\{x_i\}$ 处与 f 取相同值的 Lagrange 插值多项式 p_m,

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^{m}\Big[\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big]f(x_i),$$

我们把 p_m 的积分看成 f 的积分的近似值:

$$\int_a^b p_m(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{m} C(m,i)f(x_i), \qquad \text{(Newton-Cotes)}$$

其中, 系数 $C(m,i)$ 与 f 无关:

$$\begin{aligned} C(m,i) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = \frac{1}{m}\int_0^m \prod_{j\neq i}\frac{t-j}{i-j}dt \\ &= \frac{1}{m}\frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!}\int_0^m \prod_{j\neq i}(t-j)dt. \end{aligned}$$

如果 f 是 $m+1$ 阶可微函数, 则由插值多项式的余项公式, 有

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i),$$

如果 $|f^{(m+1)}(x)| \leqslant M_{m+1}$, 则有如下误差估计

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_m(x)dx\Big| &\leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{m}|x-x_i|dx \\ &= \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{(m+1)!m^{m+2}}\int_0^m \prod_{i=0}^{m}|t-i|dt. \end{aligned}$$

关于积分近似计算的其它公式, 读者可参考其它专门著作, 我们不再赘述.

例 6.4.1. 计算积分 $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 的近似值.

解. 以 $n=2$ 为例. 矩形公式计算积分为

$$R_2=\frac{1}{2}\big[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\big]=\frac{336}{425}\approx 0.791;$$

梯形公式计算积分为

$$T_2=\frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}f(0)+f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f(1)\big]=\frac{31}{40}\approx 0.775;$$

Simpson 公式计算积分为

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{12}\big[f(0)+4f(\frac{1}{4})+2f(\frac{1}{2})+4f(\frac{3}{4})+f(1)\big]\\&=\frac{8011}{10200}\approx 0.78539.\end{aligned}$$

根据第四章第二节中高阶导数的计算, 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的四阶导数可以写为

$$f^{(4)}(x)=(\arctan x)^{(5)}=24\cos^5(\arctan x)\sin 5(\arctan x+\frac{\pi}{2}),$$

因此 $|f^{(4)}(x)|\leqslant 24$. 这说明 $n=2$ 的 Simpson 公式的误差要小于

$$\frac{24}{180\cdot 4^4}=\frac{1}{1920}<0.0005.$$

实际的误差比这个还要小.

习题 6.4

1. 证明矩形公式和梯形公式之间满足下面的关系:

$$R_n=2T_{2n}-T_n.$$

2. 证明矩形公式, 梯形公式和 Simpson 公式之间满足下面的关系:

$$S_n=\frac{2}{3}R_n+\frac{1}{3}T_n.$$

3. 是否存在常数 C, 使得对于满足条件 $|f'''(x)|\leqslant M$ 的任意函数 f 有如下估计:

$$\Big|\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\Big|\leqslant CM(b-a)^4.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\big(\frac{a+b}{2}\big)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$, $\forall\, x \in [a,b]$. 证明

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\Big| \leqslant \frac{1}{4}M(b-a)^2.$$

6. 分别设 f 的一次导数和二次导数有界, 试估计 Simpson 公式的误差.

7. 证明 Newton-Cotes 公式中的系数满足下面的等式:

$$C(m,i) = C(m,m-i),\ 0 \leqslant i \leqslant m;\quad \sum_{i=0}^{m} C(m,i) = 1.$$

8. 计算由三次插值多项式给出的 Newton-Cotes 积分近似公式.

9. 将区间 $[a,b]$ 等分为 $2k$ 个小区间, 分点为

$$x_i = a + \frac{i}{2k}(b-a),\quad i = 0,1,\cdots,2k.$$

证明

$$\int_a^b \prod_{i=0}^{2k}(x-x_i)dx = 0.$$

10. 设 f 为 $2k+2$ 阶可微函数, p_{2k} 是 f 的插值多项式, 证明存在 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_{2k}(x)dx = \frac{1}{(2k+2)!}\int_a^b f^{(2k+2)}(\xi)\big(x - \frac{a+b}{2}\big)\prod_{i=0}^{2k}(x-x_i)dx.$$

11. 分别用矩形公式, 梯形公式和 Simpson 公式计算积分 $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ 的近似值, 要求精确到小数点后第二位.

12. 设 f 在 $[a,b]$ 上 4 阶连续可微, 用分部积分证明下面的公式:

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\\ &= \frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(x)(x-a)^2(x-b)^2dx - \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(b)-f'(a)].\end{aligned}$$

第七章　积分的应用和推广

我们在这一章里先考虑定积分在几何上的一些应用, 例如计算简单图形的面积或体积, 求曲线的弧长等等. 需要指出的是, 关于这些应用的更严格的理论探讨应参见第十三章和第十四章. 我们利用积分的梯形面积公式及其误差估计还重新给出了计算阶乘的 Stirling 公式. 最后几节则将积分推广到一般的区间以及可能是无界的函数上, 并给出了若干积分计算的例子.

§7.1　定积分的应用

§7.1.1　曲线的长度

设 $I = [\alpha, \beta]$ 为区间, 映射 $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ 用分量表示为

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I.$$

如果 $x(t)$, $y(t)$ 均为连续函数, 则称 σ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续曲线. 如果 $x(t)$, $y(t)$ 均可微 (连续可微), 则称 σ 为可微 (连续可微) 曲线.

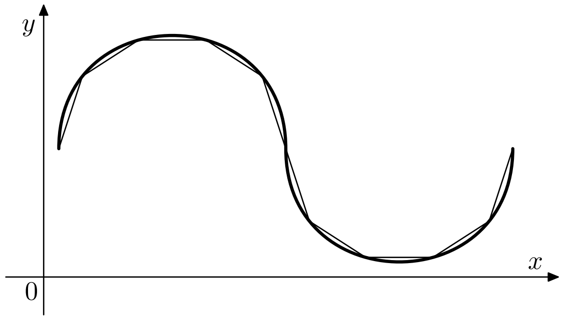


图 7.1　曲线的长度

设 σ 为连续可微曲线, 通过分割曲线并用直线段长度之和作逼近, 我们可以定义 σ 的长度为

$$L(\sigma) = \int_\alpha^\beta [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt.$$

这个公式可以如下推导. 首先注意到下面的简单不等式:

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leqslant |b-c|, \quad \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

我们将 $[\alpha, \beta]$ 分割为 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 点 $(x(t_i), y(t_i))$ 把曲线分成若干段, 每一段的长度可以近似地用直线段的长度表示, 即

$$L(\sigma) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

由微分中值定理, 存在 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$, 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

从而有

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i.$$

因为

$$\left|\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}\,\Delta t_i\right| \leqslant |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|\Delta t_i,$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|\Delta t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i(y')\Delta t_i \to 0, \quad (\|\pi\| = \max\{|t_i - t_{i-1}|\} \to 0)$$

因此有

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}\Delta t_i \\ &= \int_\alpha^\beta [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}\,dt. \end{aligned}$$

注. 如果 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$, 令

$$s = \phi(t) = \int_\alpha^t [(x'(u))^2 + (y'(u))^2]^{\frac{1}{2}}\,du, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

则 $\phi : [\alpha, \beta] \to [0, L(\sigma)]$ 是严格单调递增函数, 从而可逆, 其逆记为 $t = \psi(s)$, s 称为 σ 的弧长参数. 记 $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(\psi(s))$, $s \in [0, L(\sigma)]$. 根据反函数的求导公式易见

$$\|\tilde{\sigma}'(s)\| = \sqrt{(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2} = 1.$$

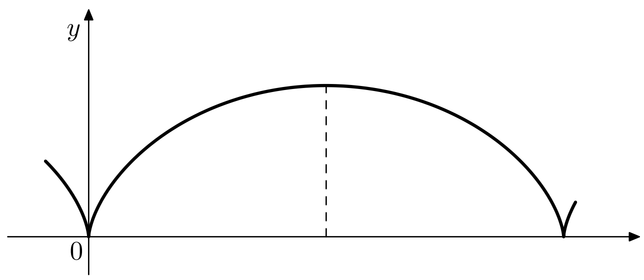


图 7.2 摆线

例 7.1.1. 求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t)),\ a > 0$$

一拱的长度.

解. 我们求 $t \in [0, 2\pi]$ 时曲线的长度

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} a[(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{\frac{1}{2}}\, dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a. \end{aligned}$$

注. 曲线也可以由别的参数给出 (如极坐标), 这时弧长公式要考虑变量替换.

§7.1.2 简单图形的面积

(**1**) 如果 $f > 0$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 则由 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ 与 $y = 0$ 围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

一般地, 当 f 变号时, 上式仍有意义, 称为代数面积和, 而

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

才是所围面积之和. 更一般地, 由 $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$ 以及 $x = a$, $x = b$ 围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\, dx.$$

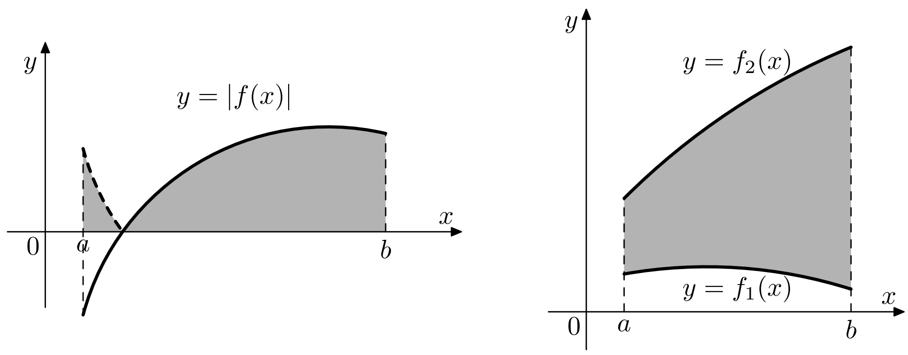


图 7.3 函数图像围成的图形

(**2**) 设 σ 为平面曲线, 由极坐标方程

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 关于 θ 连续, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$. 则由 σ, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的图形面积为

$$S = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta)\, d\theta.$$

这个公式是通过使用扇形的面积和逼近图形面积得到的.

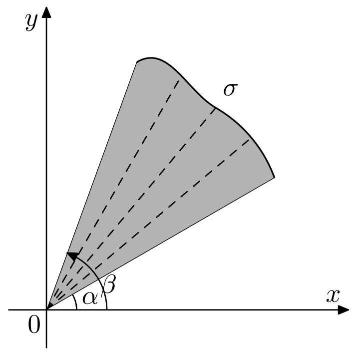


图 7.4 极坐标表示的曲线

(**3**) 如果曲线 σ 由 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 给出, 其中 $y(t) \geqslant 0$, x 关于 t 单调递增, $x([\alpha, \beta]) = [a, b]$. 则 σ 与 $x = a$, $x = b$ 以及 $y = 0$ 围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt.$$

这个公式仍然是通过使用矩形面积之和去逼近曲边梯形得到. 一般地, 如果只设 x 是单调的, 则面积公式为

$$S = \int_\alpha^\beta |y(t) x'(t)| dt.$$

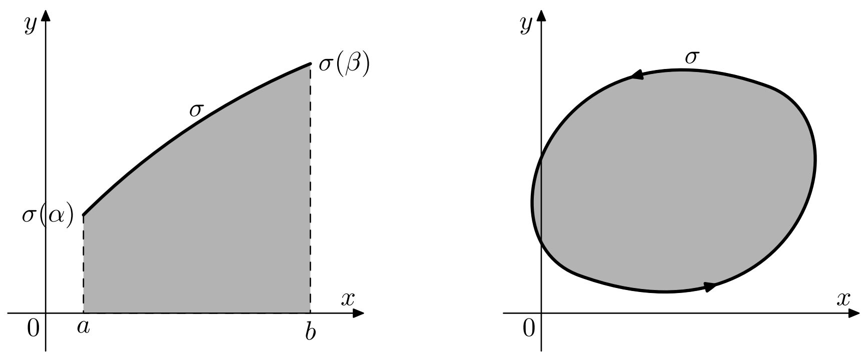


图 7.5 曲线围成的图形

如果 σ 除在 $t = \alpha, \beta$ 处以外无自交点, 则 σ 本身围成的图形的面积为

$$S = \Big| \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt \Big| = \Big| \int_\alpha^\beta x(t) y'(t) dt \Big|,$$

因为

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt &= y(t) x(t) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta y'(t) x(t) dt \\ &= -\int_\alpha^\beta y'(t) x(t) dt, \end{aligned}$$

故这个面积公式也可以改写为

$$S = \frac{1}{2}\Big|\int_{\alpha}^{\beta}[y(t)x'(t) - y'(t)x(t)]\,dt\Big|.$$

例 7.1.2. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的面积.

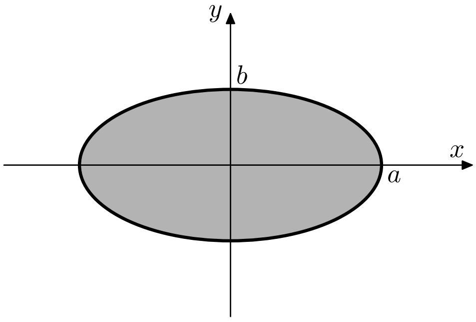


图 7.6 椭圆

解. 由图形的对称性, 有

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \\ &= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t\,dt \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \pi ab. \end{aligned}$$

例 7.1.3. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 所围成的面积.

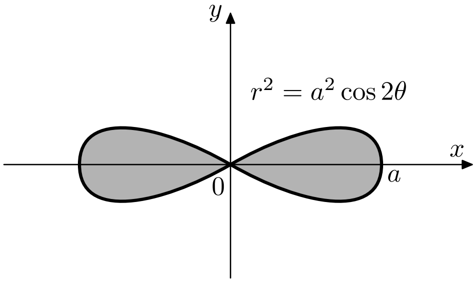


图 7.7 双纽线

解. 用极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 代入方程, 得

$$r^2 = a^2\cos 2\theta, \quad \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}].$$

由图形的对称性, 有

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta)\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = a^2.$$

(**4**) 旋转曲面的面积

设 σ 为平面曲线

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)), \quad t\in[\alpha,\beta], \ y(t) \geqslant 0.$$

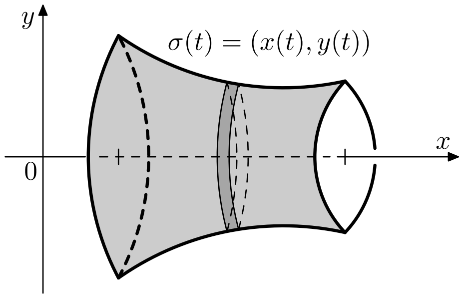


图 7.8 旋转曲面

σ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

这个公式可以这样来推导: 取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割, 在分点 t_{i-1}, t_i 之间的曲线段经过旋转后所形成的曲面的面积可以用圆台的面积近似逼近, 这一部分圆台的面积为

$$\pi(y(t_{i-1}) + y(t_i))\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

因此

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \pi(y(t_{i-1}) + y(t_i))\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2},$$

和曲线弧长公式的推导过程类似, 当分割的模趋于零时, 我们近似地有

$$(y(t_{i-1}) + y(t_i)) \approx 2y(\xi_i), \quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i])$$

以及

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \approx \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}\Delta t_i,$$

当分割的模趋于零时, 近似逼近所引起的这些误差之和趋于零. 因此有

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(\xi_i)[(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2]^{\frac{1}{2}}\Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}\, dt. \end{aligned}$$

例 7.1.4. *求将 $x^2+(y-b)^2 = a^2$ $(0 < a \leqslant b)$ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积.*

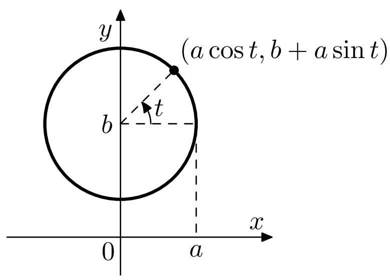


图 7.9 环面 (轮胎面)

解. 曲线的参数方程为
$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b + a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$
故旋转曲面面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} 2\pi(b + a\sin t)[a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2\pi a\int_0^{2\pi}(b + a\sin t)\, dt = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

§7.1.3 简单立体的体积

(**1**) 平行截面之间的立体体积

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中一块立体区域, 夹在平面 $x = a$ 与 $x = b$ $(a < b)$ 之间. 记 $S(x)$ 为 $x \in [a, b]$ 处垂直于 x 轴的平面截 Ω 的截面面积函数. 如果 $S(x)$ 关于 x 连续, 则 Ω 的体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

特别地, 如果两块区域 Ω_A 和 Ω_B 的截面面积函数相等, 则其体积相同. 这个事实在公元 5 到 6 世纪由祖暅 (祖冲之之子) 所发现, 17 世纪时意大利人 Cavalieri 也发现了这一事实.

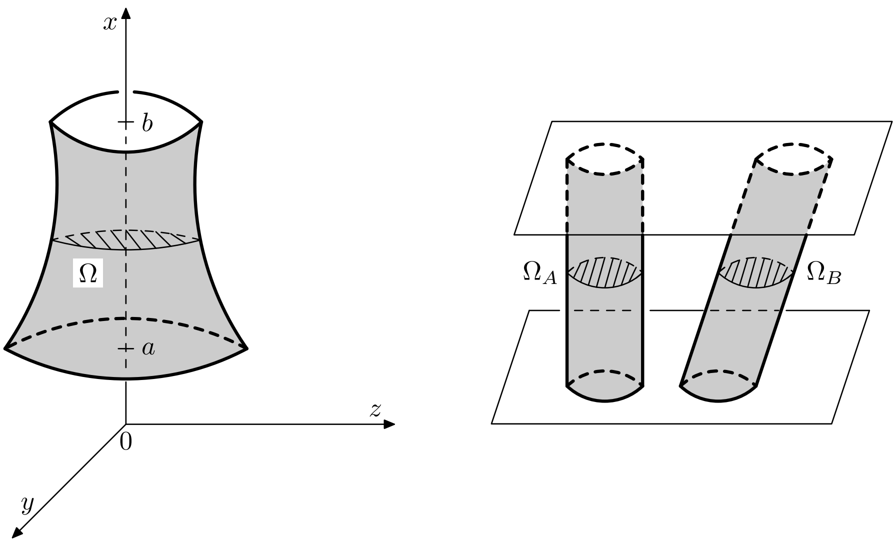


图 7.10 简单立体图形

例 7.1.5. 求椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积.

解. 固定 $x\in(-a,a)$, 它的截面为椭圆面

$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant\big(1-\dfrac{x^2}{a^2}\big)$,

截面面积为

$S(x)=\pi b\big(1-\dfrac{x^2}{a^2}\big)^{\frac{1}{2}}c\big(1-\dfrac{x^2}{a^2}\big)^{\frac{1}{2}}=\pi bc\big(1-\dfrac{x^2}{a^2}\big)$,

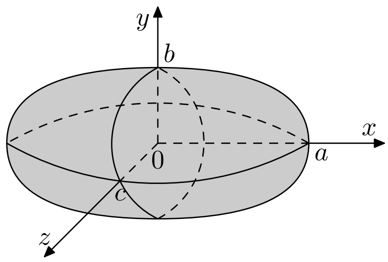


图 7.11 椭球

故椭球的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(**2**) 旋转体的体积

设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant|y|\leqslant|f(x)|\}$$

绕 x 轴旋转一周所得旋转体. 该旋转体在 $x\in[a,b]$ 处的截面为圆盘, 其面积为

$S(x)=\pi f^2(x)$.

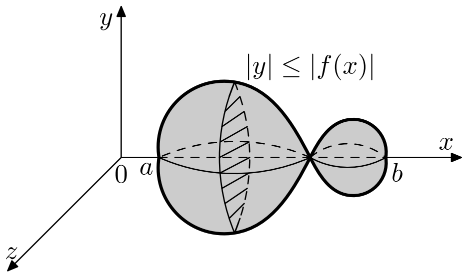


图 7.12 旋转体

因此 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

例 7.1.6. 求高为 h, 底半径为 r 的圆锥体的体积.

解. 由上面的体积公式, 有
$V = \pi \int_0^h \big(\frac{r}{h}x\big)^2\,dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

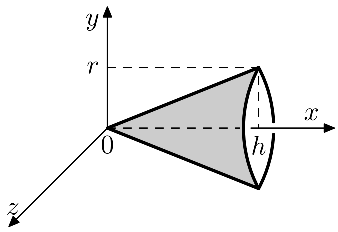


图 7.13 圆锥体

§7.1.4 物理应用举例

(**1**) 降落伞的原理

质量为 m 的物体在重力作用下自由下落, 下落时所受空气阻力与下落速度成正比, 比例常数为 k, 则由牛顿定律,

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt},$$

其中, g 为重力加速度, v 为物体的速度, 我们选择指向地心的坐标. 上面的方程等价于

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{k}{m}t}v) = ge^{\frac{k}{m}t},$$

假设初速度为零, 则

$$e^{\frac{k}{m}t}v = g\int_0^t e^{\frac{k}{m}s}ds = \frac{mg}{k}(e^{\frac{k}{m}t}-1),$$

即

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

特别地, $t\to\infty$ 时 $v(t)\to\dfrac{mg}{k}$, 即速度不会增加到无限大.

(**2**) 第二宇宙速度

从地球表面发射火箭, 如果要求火箭无限飞离地球, 问: 火箭的初速度至少为多大? 这里主要考虑火箭摆脱地球引力的问题, 因此我们忽略太阳的引力. 根据万有引力定律, 在距地心 x 处火箭所受地球引力为

$$F = GMmx^{-2},$$

其中, G 为万有引力常数, M 为地球质量, m 为火箭质量. 在地球表面, 有

$$GMmR^{-2} = mg,$$

其中 R 为地球半径. 火箭从地面升到距地心 r $(r>R)$ 处需要做的功为

$$\int_R^r GMmx^{-2}dx = \int_R^r mgR^2x^{-2}dx = mgR^2\big(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\big).$$

因此, 火箭无限飞离地球需要做功

$$W = \lim_{r\to\infty} mgR^2\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\Big) = mgR.$$

由能量守恒原理, 火箭的初速度至少为 v_0, 则

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR,$$

因而

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2\times 9.81(m/s^2)\times 6.371\times 10^6 m} \approx 11.2\,(km/s).$$

(**3**) 缆绳的工作原理

绳索在日常生活中应用十分广泛, 例如在码头上经常用来系住船舶. 为什么绳索能拉住大型船舶? 下面我们就来作一个力学分析, 它揭示了绳索产生巨大拉力的原理.

设一段绳索缠绕在一圆柱体上, 绳索一端施以拉力 f, 绳索与圆柱体之间的摩擦系数为 k, 如果绳索共绕了 n 圈, 在绳索的另一端产生的拉力为 F, 我们来求 F 的值.

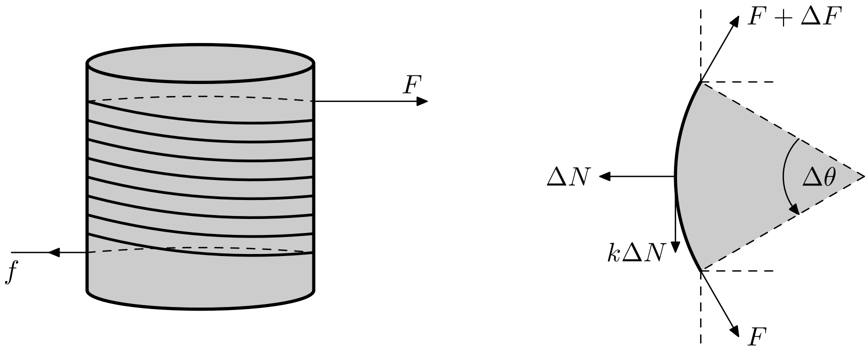


图 7.14 缆绳受力分析

取角度为 $\Delta\theta$ 的一小段绳索, 研究其受力状况. 设这一段绳索承受圆柱体的正压力为 ΔN, 则摩擦力为 $k\Delta N$. 这一段绳索两端所受拉力分别为 $F, F+\Delta F$, 则考虑沿圆柱体外法向和切向这两个方向绳索的受力, 得到方程

$$\begin{cases} \Delta N = (F+\Delta F)\sin\frac{\Delta\theta}{2} + F\sin\frac{\Delta\theta}{2}, \\ (F+\Delta F)\cos\frac{\Delta\theta}{2} = F\cos\frac{\Delta\theta}{2} + k\Delta N. \end{cases}$$

从方程中消去 ΔN, 令 $\Delta\theta\to 0$, 得

$$\frac{dF}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta\theta} = kF,$$

利用积分解得

$$F(\theta) = f \cdot e^{k\theta}.$$

当 $\theta = 2n\pi$ 时, $F = f \cdot e^{2kn\pi}$. 例如, 设摩擦系数 $k = \frac{1}{4}$, $n = 6$, $f = 10kg$, 则 $F = 10e^{3\pi}kg > 100000kg$.

§7.1.5 进一步应用的例子

(**1**) 近似计算与 Stirling 公式

设 f 为 $[a, b]$ 上的二次连续可微函数, 则由第五章第四节 (**??**) 式可得

$$|f(x) - l(x)| \leqslant \frac{1}{2}M(x-a)(b-x), \quad \forall\ x \in [a, b],$$

其中, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, 且

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

因此有如下的积分估计

$$\Big|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b l(x)dx\Big| \leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)dx = \frac{1}{12}M(b-a)^3.$$

这也就是 f 在 $[a, b]$ 上的积分用梯形面积逼近的误差公式.

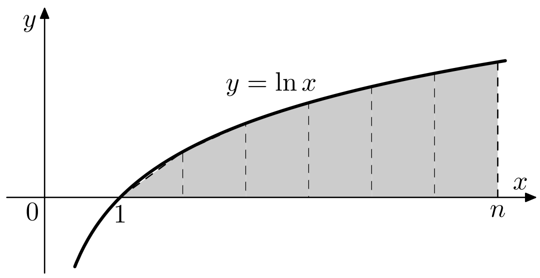


图 7.15 梯形面积逼近

我们考虑函数 $f = \ln x$ 在 $[1, n]$ 上的积分. 令

$$\begin{aligned} A_n &= \int_1^n \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^n - \int_1^n (\ln x)' x dx = n\ln n - n + 1, \\ B_n &= \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \cdots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) \\ &= \ln n! - \frac{1}{2}\ln n, \end{aligned}$$

根据上面的误差估计, 并注意 $\ln x$ 为凹函数, 则有

$$0 < \int_k^{k+1} \ln x\, dx - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) < \frac{1}{12}\frac{1}{k^2}.$$

令 $C_n = A_n - B_n$, 则 C_n 是 $n-1$ 次累计误差, 它关于 n 是单调递增的. 从而

$$0 < C_n < \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{12}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\big)\Big) = \frac{1}{6},$$

这说明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ 存在, 且

$$\begin{aligned} 0 < C - C_n &< \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\ &< \frac{1}{12}\Big[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\Big] = \frac{1}{12}\big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\big). \end{aligned}$$

下面我们来求极限 C 的值. 由定义, 有

$$C_n = A_n - B_n = n\ln n - n + 1 - \ln n! + \frac{1}{2}\ln n,$$

因此

$$n! = e^{1-C_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

由第六章第三节 Wallis 公式,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

将 $n!$ 和 $(2n)!$ 的表达式代入, 有

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{2(1-C_n)} n^{2n+1} e^{-2n}}{e^{1-C_{2n}}(2n)^{(2n+\frac{1}{2})}e^{-2n}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{e^{1-C}}{\sqrt{2}},$$

这就得到 $n!$ 的如下表示

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\big(\frac{n}{e}\big)^n e^{C-C_n}, \qquad (\text{ Stirling 公式})$$

其中

$$1 < e^{C-C_n} < e^{\frac{1}{12}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n})} < 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{10n^2}, \quad \forall\ n > 1.$$

(**2**) π 为什么为无理数.

历史上, 最早被发现的无理数之一是 $\sqrt{2}$, 这是毕达哥拉斯学派发现的, 这个发现在当时引起了很大的恐慌. 1761 年, Lambert 证明了 π 为无理数. 1947 年, Niven 给出了 π 为无理数的一个简单证明, 下面的证明基本上就是 Niven 提出的.

证明用的是反证法. 假设 π 为有理数, $\pi = \dfrac{a}{b}$, a, b 为互素正整数. 令

$$f(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n, \quad x\in[0,\pi],$$

其中 n 为待定正整数. 我们有

(1) $f(x)=f(\pi-x)$, $x\in[0,\pi]$;

(2) $f^{(k)}(0)$ 为整数, $k=1,2,\dots,2n$;

(3) $f^{(k)}(\pi)$ 为整数, $k=1,2,\dots,2n$.

其中, (1) 是显然的. (2) 成立是因为, 当 $0\leqslant k<n$ 时 $f^{(k)}(0)=0$; 当 $n\leqslant k\leqslant 2n$ 时,

$$f^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}C_n^{k-n}a^{2n-k}(-b)^{k-n}\cdot k!,$$

这是整数. (3) 可由 (1) 和 (2) 直接得到.

如果令

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x),$$

则显然有

$$F''(x)+F(x)=f(x),$$

因此

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=[F'(x)\sin x-F(x)\cos x]\Big|_0^\pi=F(\pi)+F(0)\in\mathbb{Z}.$$

另一方面, 在 $(0,\pi)$ 上 $0<f(x)\leqslant\frac{1}{n!}(\pi a)^n$, 因此

$$\begin{aligned}1\leqslant\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx&\leqslant\int_0^\pi f(x)\,dx\\&\leqslant\frac{(\pi a)^n}{n!}\pi\to 0,\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

这就导出了矛盾. □

习题 7.1

1. 计算下列曲线的弧长:

   (1) $y=x^{\frac{3}{2}}$, $(0\leqslant x\leqslant 4)$;

   (2) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $t\in[0,2\pi]$;

   (3) $x=a\cos^4 t$, $y=a\sin^4 t$, $a>0$, $t\in[0,\pi]$;

   (4) $y^2=2ax$, $a>0$, $0\leqslant x\leqslant a$.

2. 求下列曲线所围成图形的面积:

   (1) $y^2=ax$, $y=\frac{1}{a}x^2$, $a>0$;

   (2) $y=x^2-2x$, $y=-x^2$;

   (3) $y=x(x-1)(x-2)$, $y=0$;

   (4) $y^2=x^2(a^2-x^2)$, $a>0$;

(5) $r = a(1-\cos\theta)$, $a > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

(6) $r = a\sin 3\theta$, $a > 0$.

3. 求下列曲线旋转所成曲面的面积:

(1) $y = \tan x$ 绕 x 轴, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$;

(2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ 绕直线 $y = a$, $a > 0$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$;

(3) $x^2 + y^2 = a^2$ 绕 x 轴, $a > 0$;

(4) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 绕直线 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

4. 求下列曲面所围成的体积:

(1) $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

(2)* $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$;

(3) $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$, $b > 0$;

(4)* $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$, $a > 0$.

5. 求下列旋转体的体积:

(1) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ 绕 x 轴旋转所成旋转体;

(2) $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ $(a > b > 0)$ 的内部绕 y 轴旋转所成旋转体;

(3) $y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ 绕 $x = b$ $(b > 0)$ 旋转所围成的旋转体;

(4) $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ 绕 x 轴旋转所围成的旋转体.

6. 记 $c_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \ln n$ $(n \geqslant 1)$. 在 Stirling 公式的证明中, 将函数 $f(x) = \ln x$ 换成 $f(x) = x^{-1}$, 由此证明
(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在;
(2) 记 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(c_n - c) = \frac{1}{2}$.

7. 设 $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ 为连续可微的曲线, 证明

$$L(\sigma) \geqslant |\sigma(1) - \sigma(0)|,$$

其中 $L(\sigma)$ 是 σ 的长度, $|p - q|$ 表示平面上两点 p 和 q 的直线距离.

§7.2 广义积分

在前一章, 我们研究了有界函数在闭区间上的 Riemann 积分. 一个自然的问题就是, 对于一般的区间以及对于无界的函数, 如何定义积分? 在前一节计算第二宇宙速度时, 我们曾经用到取极限的办法, 得到了区间 $[R,+\infty)$ 上的积分. 现在来看另一个例子, 这个例子中涉及的函数不是有界的. 事实上, 考虑 $(0,1]$ 区间上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 这是一个连续函数, 其图像 $y=f(x)$ 和直线 $x=0$, $x=1$ 以及 $y=0$ 围成的区域虽然无界, 但其面积却是有界的. 下面我们就把这些例子推广到一般的情形.

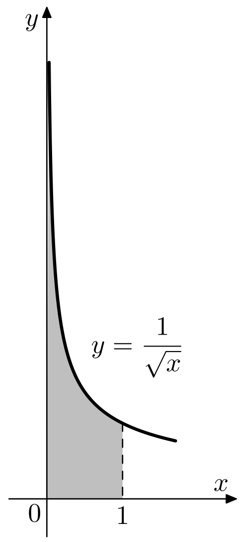


图 7.16 无界函数的积分

定义 7.2.1 (无穷积分)**.** 设 $a\in\mathbb{R}$, 定义在 $[a,+\infty)$ 中的函数 f 如果在任何有限区间 $[a,A]$ 上都是 *Riemann* 可积的, 且极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

存在(且有限), 则称无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx,$$

否则就称无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 不存在或发散.

类似地, 我们也可以定义无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, 以及 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. 并且无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛当且仅当 $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 均收敛, 此时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\quad \forall\ a\in\mathbb{R}.$$

需要注意的是, 利用极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx$$

也可以定义 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一种积分, 它和前一种定义不是等价的, 称为 Cauchy 主值积分, 记为

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx.$$

从无穷积分的定义立即得到如下的基本判别法:

(无穷积分的 Cauchy 准则) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分收敛 $\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $M=M(\varepsilon)$, 使得当 $B>A>M$ 时,

$$\Big|\int_A^B f(x)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

对于 $(-\infty,a]$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分有完全类似的判别法.

例 7.2.1. 讨论无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解. 当 $A>1$ 时,

$$\int_1^A\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}\ln A, & p=1,\\ \frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1), & p\neq 1.\end{cases}$$

因此只有 $p>1$ 时积分才是收敛的, 此时

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1)=\frac{1}{p-1}.$$

一般地, 如果连续函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上存在原函数 F, 则由微积分基本公式,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}F(A)-F(a),$$

即积分是否收敛与极限 $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}F(A)$ 是否存在是一致的.

例 7.2.2. 计算无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

解. $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的原函数为 $\arctan x$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\,dx\\&=\arctan x\Big|_{-\infty}^0+\arctan x\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\end{aligned}$$

和无穷积分类似, 我们也可以通过极限来处理无界函数的积分.

定义 7.2.2 (瑕积分)**.** 设函数 f 在任何区间 $[a',b]$ $(a<a'<b)$ 上均 *Riemann* 可积, 如果极限

$$\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^b f(x)\,dx$$

存在（且有限）, 则称瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^b f(x)\,dx,$$

否则就称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 不存在或发散.

不难看出, 如果 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 的瑕积分等于其 Riemann 积分. 如果 f 在 a 附近无界, 从而在 $[a,b]$ 上不是 Riemann 可积的, 则称 a 为 f 的瑕点. 类似地, 可以在 $[a,b)$ 上定义瑕积分, 当瑕点不只一个时也可类似地定义瑕积分, 瑕积分的收敛性仍有和广义积分类似的 Cauchy 准则判别法.

如果一个函数既是无界的, 定义域又是无界区间, 则把上面两种积分, 即无穷积分和瑕积分的处理方法结合起来往往可以对于这种函数的积分加以处理, 得到的积分统称广义积分, 在别的书上也称反常积分.

例 7.2.3. 讨论积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解. 当 $0<a<1$ 时,

$$\int_a^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} -\ln a, & p=1, \\ \frac{1}{1-p}(1-a^{1-p}), & p\neq 1. \end{cases}$$

因此只有 $p<1$ 时积分才是收敛的, 此时

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0}\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p}) = \frac{1}{1-p}.$$

例 7.2.4. 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

解. 被积函数有两个瑕点 ± 1. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \arcsin x\Big|_{-1}^0 + \arcsin x\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

广义积分具有和 Riemann 积分类似的性质, 一些运算法则, 例如分部积分, 变量代换等也可以直接推广过来.

命题 7.2.1. 假设积分限 a,b,c 等可以取 $-\infty$ 或 $+\infty$, 则

(1) 如果 f 在 $[a,b]$, $[b,c]$ 上积分存在, 则 f 在 $[a,c]$ 上的积分也存在, 且

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx;$$

(2) 如果 f, g 在 $[a,b]$ 上积分存在, 则 $\lambda f+\mu g$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$ 在 $[a,b]$ 上的积分也存在, 且

$$\int_a^b [\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

例 7.2.5. 计算积分 $\int_0^1 \ln x\, dx$.

解. 利用 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ 得

$$\int_0^1 \ln x\, dx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot \frac{1}{x}\, dx = -1.$$

例 7.2.6. 讨论积分 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ 的敛散性.

解. 只要讨论被积函数在 $[1,+\infty)$ 上的积分就可以了. 作变量代换 $x=\sqrt{t}$, 得

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

我们利用分部积分和 Cauchy 准则来判断积分的收敛性:

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt\right| &= \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_A^B + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\, dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{2}\int_A^B t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{A}} \to 0 \ \ (B>A\to+\infty).\end{aligned}$$

这说明积分是收敛的.

这个例子也告诉我们, f 在 $[a,+\infty)$ 上的积分存在并不意味着 $f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$.

习题 7.2

1. 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数. 如果对于任意的 $a'\in(a,b)$, f 均在 $[a',b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. 计算下列无穷积分:

(1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$; (2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$; (3) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln^2(\ln x)}$;
(4) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$; (5) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$; (6) $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx$;
(7) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$; (8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$; (9) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

3. 计算下列瑕积分:

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (2) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; (3) $\int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
(4) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; (5) $\int_\alpha^\beta \frac{xdx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$; (6) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

4. 讨论下列广义积分的敛散性:

$$(1)\ \int_0^{+\infty}|\cos x^2|dx;\quad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x\sqrt{x}}.$$

5. 讨论下列瑕积分的敛散性:

$$(1)\ \int_0^1\frac{dx}{\ln x};\quad (2)\ \int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx;\quad (3)\ \int_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}.$$

6. 设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 中的非负连续函数, 如果 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx=0$, 证明 $f(x)\equiv 0$.

7. 设 $f(x)>0$, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx>0$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中一致连续, 则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

(提示: 先用 Cauchy 准则和中值定理找收敛子列.)

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中可导, 且导函数 $f'(x)$ 有界, 则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. (提示: 用上一题.)

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中连续可导, 如果 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f'(x)dx$ 均收敛, 则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

11. $(*)$ 举例说明, 当无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 不一定收敛.

12. $(*)$ 举例说明, 当无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 不一定有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

§7.3 广义积分的收敛判别法

在前一节我们知道可以用 Cauchy 准则来判断广义积分的敛散性. 下面我们进一步介绍其它的判别法, 假定函数在有限区间上可积. 首先研究非负函数, 注意到如果 f 非负, 则积分 $\displaystyle\int_a^A f(x)\,dx$ 关于 A 单调递增, 因此其极限存在当且仅当它有上界, 这就得到了非负函数广义积分的如下基本判别法:

定理 7.3.1. 设 $f \geqslant 0$, 则无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛当且仅当

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$$

是 $A \in [a, +\infty)$ 的有界函数; 对瑕积分有完全类似的结果.

由此又得到如下的比较判别法:

定理 7.3.2. 设 $0 \leqslant f \leqslant Mg$, $M > 0$ 为常数, 则当无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛时, 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛; 当无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散时, 无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 也发散; 瑕积分有完全类似的结果.

证明. 令

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx, \quad G(A) = \int_a^A g(x)\,dx,$$

则 $0 \leqslant F(A) \leqslant M \cdot G(A)$, $A \in [a, +\infty)$. 因此, 如果 $G(A)$ 有界, 则 $F(A)$ 也有界; $F(A)$ 无界时, $G(A)$ 也无界. □

注. (1) 常数 M 的存在性通常利用极限去找. 即如果极限 $l = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 则当 $0 < l < \infty$ 时, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 同时收敛或发散; 当 $l = 0$ 时, 如果 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛; 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 发散, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也发散.

(2) 我们可以拿函数 f 与 x^{-p} 比较, 则得到如下的 Cauchy 判别法:

(i) 如果 $p > 1$, 且存在常数 $C > 0$, 使得

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{C}{x^p} \quad (\forall\ x \geqslant x_0),$$

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛;

(ii) 如果 $p \leqslant 1$, 且存在常数 $C > 0$, 使得

$$f(x) \geqslant \frac{C}{x^p} \quad (\forall\ x \geqslant x_0),$$

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散;

当然, 常数 C 通常是求极限得到的, 即如果极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$ 存在, 则

(iii) 如果 $p > 1$, $0 \leqslant l < +\infty$, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛;

(iv) 如果 $p \leqslant 1$, $0 < l \leqslant +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散;

(3) 对于瑕积分, 利用与函数 x^{-p} 的比较, 可以得到完全类似的 Cauchy 判别法.

例 7.3.1. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ 的敛散性.

解. 因为

$$0 \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} \leqslant x^{-2}, \quad \forall\ x \geqslant 1,$$

故积分是收敛的. □

例 7.3.2. 判别积分 $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx$ $(a \in \mathbb{R})$ 的敛散性.

解. 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 x^a e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2+a}}{e^x} = 0,$$

故积分是收敛的. □

例 7.3.3. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$ 的敛散性.

解. 被积函数有原函数 $F(x) = \ln(1+\ln x)$, 由 Newton-Leibniz 公式易见积分是发散的. □

这里要提醒读者注意, 比较判别法只适用于非负函数. 对于一般函数的广义积分, 有时可以化为非负函数的积分来判断是否收敛.

设 f 为一般函数, 记

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\},$$

则 f^+ 和 f^- 均为非负函数, 且 $f = f^+ - f^-$. 因此, 如果 f^+ 和 f^- 的积分均收敛, 则 f 的积分也收敛, 此时称 f 的积分**绝对收敛**, 这和 $|f| = f^+ + f^-$ 的积分收敛是一致的. 如果 f 的积分收敛, 但 $|f|$ 的积分发散, 则称 f 的积分**条件收敛**.

例 7.3.4. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ $(p > 1)$ 的敛散性.

解. 因为

$$\left|\frac{\cos x}{x^p}\right| \leqslant x^{-p}, \quad \forall\ x \geqslant 1,$$

而 $p > 1$ 时 x^{-p} 积分收敛, 故原积分是绝对收敛的. □

例 7.3.5. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \cos x^p\,dx$ $(p > 1)$ 的敛散性.

解. 利用变量代换 $x = t^{\frac{1}{p}}$ 以及前节最后例子中的办法 (Cauchy 准则), 不难看出积分是收敛的. 但是

$$|\cos x^p| \geqslant \cos^2 x^p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x^p),$$

函数 $\cos 2x^p$ 的积分是收敛的, 因此 $\cos x^p$ 在 $[1, +\infty)$ 上的积分是条件收敛的. □

对于两个函数乘积的广义积分, 在某些情形下利用第二积分中值公式可以给出下面的判别法.

定理 7.3.3 (Dirichlet)**.** *设 $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ 在 $[a, +\infty)$ 中有界, 函数 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.*

证明. 设 $|F(A)| \leqslant C$, $\forall\ A \geqslant a$. 则

$$\Big|\int_A^B f(x)\,dx\Big| = \Big|\int_a^B f(x)\,dx - \int_a^A f(x)\,dx\Big| \leqslant 2C, \quad \forall\ A, B \geqslant a.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 $x > M$ 时

$$|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4C}.$$

由积分第二中值定理, 当 $A, B > M$ 时

$$\begin{aligned}
\Big|\int_A^B f(x)g(x)\,dx\Big| &= \Big|g(A)\int_A^\xi f(x)\,dx + g(B)\int_\xi^B f(x)\,dx\Big| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4C}\Big|\int_A^\xi f(x)\,dx\Big| + \frac{\varepsilon}{4C}\Big|\int_\xi^B f(x)\,dx\Big| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4C}2C + \frac{\varepsilon}{4C}2C = \varepsilon.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛. □

例 7.3.6. 判断积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ $(0 < p < 2)$ 的敛散性.

解. 因为

$$\lim_{x\to+0} x^{p-1}\frac{\sin x}{x^p} = 1,$$

故在 $(0, 1]$ 上 $\frac{\sin x}{x^p}$ 积分的敛散性和 x^{1-p} 的积分敛散性一致. 当 $p < 2$ 时 x^{1-p} 的积分在 $(0, 1]$ 上收敛. 下面只要判断 $\frac{\sin x}{x^p}$ 在 $[1, +\infty)$ 上的敛散性即可. 由于积分 $\int_1^A \sin x\,dx$ 显然有界, 而 $\frac{1}{x^p}$ $(p > 0)$ 在 $[1, +\infty)$ 中单调趋于零, 故由 Dirichlet 判别法知原积分是收敛的. □

注. 请读者自行证明, 当 $0 < p \leqslant 1$ 时, 该积分是条件收敛的; 当 $1 < p < 2$ 时该积分是绝对收敛的.

定理 7.3.4 (Abel). *如果广义积分* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *收敛, 函数* $g(x)$ *在* $[a,+\infty)$ *中单调有界, 则积分* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *也收敛.*

证明. 因为 g 有界, 可设

$$|g(x)| \leqslant C, \quad \forall\ x \in [a,+\infty).$$

又因为 f 积分收敛, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 $A, B > M$ 时

$$\Big|\int_A^B f(x)\,dx\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C}.$$

由积分第二中值定理,

$$\begin{aligned}\Big|\int_A^B f(x)g(x)\,dx\Big| &= \Big|g(A)\int_A^\xi f(x)\,dx + g(B)\int_\xi^B f(x)\,dx\Big| \\ &\leqslant C\Big|\int_A^\xi f(x)\,dx\Big| + C\Big|\int_\xi^B f(x)\,dx\Big| \\ &\leqslant C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛. □

这些判别法对于瑕积分也有完全类似的表达形式, 我们不再赘述.

例 7.3.7. *设* $a \geqslant 0$, *研究积分* $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx$ *的敛散性.*

解. 函数 e^{-ax} 在 $[0,+\infty)$ 中单调递减且有界, 函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上积分收敛, 因此由 Abel 判别法知原积分收敛. □

例 7.3.8. *判断积分* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\arctan x\,dx$ $(p > 0)$ *的敛散性.*

解. 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$, $g(x) = \arctan x$, 则 f 在 $[1,+\infty)$ 上的积分收敛, 而 g 在 $[1,+\infty)$ 中单调有界, 故由 Abel 判别法知原积分收敛. □

习题 7.3

1. 判断下列无穷积分的敛散性:

$$\begin{array}{lll}(1)\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}; & (2)\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}; & (3)\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^7}}; \\ (4)\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx; & (5)\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx; & (6)\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}dx; \\ (7)\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx; & (8)\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx; & (9)\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x}dx.\end{array}$$

2. 判断下列瑕积分的敛散性:

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}; & (2)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}; & (3)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};\\
(4)\ \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; & (5)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}dx; & (6)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx;\\
(7)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx; & (8)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx; & (9)\ \displaystyle\int_{0.5}^1 \frac{dx}{\ln x}.
\end{array}$$

3. 判断下列无穷积分是绝对收敛还是条件收敛的 ($p>0$):

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx; & (2)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx; & (3)\ \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x dx;\\
(4)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x}dx; & (5)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx; & (6)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^p}dx.
\end{array}$$

4. 研究下列广义积分的敛散性 ($p,q>0$):

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}; & (2)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}dx; & (3)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x^4}}dx;\\
(4)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x-1}{x^p}dx; & (5)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}; & (6)\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}dx.
\end{array}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中连续, 如果 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛. (提示: 用平均值不等式.)

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,A]$ $(A<\infty)$ 上均可积. 如果 $\displaystyle\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$, 证明 $L=0$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 也收敛.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调递减, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 证明 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$. (提示: 在区间 $[A/2,\ A]$ 上估计积分.)

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调递减趋于零, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\sqrt{f(x)/x}\,dx$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛. (提示: 利用上题, 比较被积函数.)

9. 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 如果 $x\to+\infty$ 时 $xf(x)$ 单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0.$$

10. $(*)$ 设 $f(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 中连续, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$ 收敛, 证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)dx=+\infty.$$

11. $(*)$ 研究广义积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} dx \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

的敛散性.

§7.4 广义积分的几个例子

本节内容可以作为选读材料. 我们计算几个广义积分作为示例.

例 7.4.1. 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \ (a > 0)$.

解. 利用分部积分, 计算出被积函数的原函数为

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax},$$

因此, 由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$I = F(+\infty) - F(0) = -F(0) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

例 7.4.2. 计算积分 $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \, dx \ (0 < r < 1)$.

解. 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\frac{1-t^2}{1+t^2} + r^2} \frac{2dt}{1 + t^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(1 - r^2)}{(1 - r)^2 + (1 + r)^2 t^2} dt \\ &= 2 \arctan \frac{1 + r}{1 - r} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

例 7.4.3. 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} \, dx$.

解. 令 $x = \dfrac{1}{t}$, 则

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-2} dt}{1 + t^{-4}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1 + t^4} dt,$$

因此有

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

这说明 $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

例 7.4.4. 计算积分 $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n 为非负整数).

解. 当 $n = 0$ 时,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx \\ &= n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = nI_{n-1}, \end{aligned}$$

因此

$$I_n = n!, \quad \forall\, n \geqslant 0.$$

例 7.4.5. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ ($n \geqslant 1$).

解. 当 $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

当 $n \geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2(n-1)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$I_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

例 7.4.6. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (*Euler-Poisson* 积分).

解. 由 Taylor 展开易见

$$e^t \geqslant 1 + t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

因此

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall\ x > 0.$$

从而得到如下的积分估计

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\, dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx,$$

上式左边利用变量代换 $x = \sin t$, 中间利用变量代换 $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$, 右边利用上面的例子, 最后得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},$$

利用 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}$$

和数列极限的夹逼定理可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 7.4.7. 计算积分 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\, dx\ (a, b > 0)$.

解. 令 $x = \sqrt{\frac{b}{a}\frac{1}{t}}$, 则

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{b}{t^2}-at^2} \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{t^2} dt,$$

因此有

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}} \big(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{x^2}\big) dx \\
&= \frac{e^{-2\sqrt{ab}}}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x})^2} d\big(\sqrt{a}x - \frac{\sqrt{b}}{x}\big) \\
&= \frac{e^{-2\sqrt{ab}}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

这说明

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}}.$$

例 7.4.8. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$.

解. 利用等式 $\sin(2n-1)x - \sin(2n-3)x = 2\sin x \cos 2(n-1)x$ 易得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

再利用等式 $\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x = \sin(2n-1)x\sin x$ 可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}n, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上, 利用不等式 $x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{x^2}dx \leqslant \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx& \\ \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\delta} \frac{\sin^2 nx}{x^2}\big(1-\frac{\delta^2}{6}\big)^{-1}dx + \frac{1}{n}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\big(1-\frac{\pi^2}{24}\big)^{-1}dx&.\end{aligned}$$

作变量代换 $x = \frac{t}{n}$, 并令 $n \to +\infty$, 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \big(1-\frac{\delta^2}{6}\big)^{-1}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

再令 $\delta \to 0^+$ 即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

注. 利用分部积分和简单的变量替换, 由此例不难得出

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 7.4.9. 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx$ (*Euler* 积分).

解. 作变量代换 $x = 2t$, 得

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\, dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\, dt,$$

在上式最后的积分中作变量代换 $t = \frac{\pi}{2} - s$, 得

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t\, dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\, dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin s\, ds,$$

即

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I,$$

因此 $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. □

象 Riemann 积分一样, 广义积分有时也可以看成某种部分和的极限.

命题 7.4.1. 设函数 f 在 $(0, b]$ 中单调递减, 则

$$\int_0^{b} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b);$$

类似地, 如果函数 f 在 $[0,b)$ 中单调递增, 则

$$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k-1}{n}b);$$

证明. 当 f 在 $(0,b]$ 中单调递减时, 不妨设 $f\geqslant 0$ (不然考虑 $f(x)-f(b)$). 我们有估计

$$\frac{b}{n}f(\frac{k+1}{n}b)\leqslant\int_{\frac{k}{n}b}^{\frac{k+1}{n}b} f(x)\,dx\leqslant\frac{b}{n}f(\frac{k}{n}b),$$

因此有

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b)\leqslant\int_0^b f(x)\,dx$$

以及

$$\int_{\frac{b}{n}}^b f(x)\,dx\leqslant\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}b)\leqslant\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b),$$

当 $\int_0^b f(x)\,dx$ 收敛时, 由数列极限的夹逼定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b)$ 存在且等于积分 $\int_0^b f(x)\,dx$. 反之, 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b)$ 存在, 则积分 $\int_{\frac{b}{n}}^b f(x)\,dx$ 有上界, 因而收敛, 因此也得到欲证极限等式.

当函数 f 在 $[0,b)$ 上单调递增时, 证明是完全类似的, 略. □

同理, 无穷积分有时也可以转化为极限, 这种极限要用到无穷求和, 这是下一章的内容.

习题 7.4

1. 计算下列积分 (n 为正整数):

$$(1)\ \int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx;\quad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n};\quad (3)\ \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx\ (a>0).$$

2. 计算下列积分 (n 为正整数, $a>0$):

$$(1)\ \int_0^1(\ln x)^n dx;\quad (2)\ \int_0^1\frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx;\quad (3)\ \int_0^1\frac{x^n dx}{1-x};\quad (4)\ \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n x dx.$$

3. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx;\quad (2)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx;\quad (3)\ \int_0^1\sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx.$$

4. 计算下列积分:

$$\begin{aligned}&(1)\ \int_0^{\pi} x\ln\sin x dx;\quad &&(2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x dx;\quad &&(3)\ \int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx;\\ &(4)\ \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx;\quad &&(5)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}dx;\quad &&(6)\ \int_0^{\pi}\frac{x^2}{1-\cos x}dx.\end{aligned}$$

5. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3};\quad (2)\ \int_0^1\frac{1+x^4}{1+x^6}dx;\quad (3)\ \int_0^{+\infty}\frac{1+x^4}{1+x^6}dx.$$

6. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\quad(\alpha\in\mathbb{R});\quad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

7. 当积分有意义时, 证明下面的等式

$$\int_0^{+\infty}f[(ax-\frac{b}{x})^2]dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(y^2)dx\quad(a,b>0).$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $c>0$, 积分 $\displaystyle\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 收敛, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=f(0)\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha,\beta>0).$$

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 如果对于任意 $b>a>0$, 积分 $\displaystyle\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=L,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=M,$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=[L-M]\ln\frac{\beta}{\alpha}\quad(\alpha,\beta>0).$$

10. 计算下列积分 ($a,b>0$):

$$(1)\ \int_0^{+\infty}(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2})\frac{dx}{x^2};\quad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}dx.$$

11. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln|\sin^2x-a|dx\quad(0\leqslant a\leqslant1);\quad (2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2x+a)dx\quad(a>0).$$

(提示: (2) 可先承认第九章 (9.13) 式.)

第八章　数项级数

在研究 Taylor 展开时, 我们遇到过级数的收敛问题, 这一章和下一章我们就来处理这样的问题. 和积分一样, 对于一列数 (不一定有限) 的求和可以看成一种新的运算, 这种运算不属于初等的四则运算, 但具有类似的性质.

§8.1　级数收敛与发散的概念

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为一列实数, 形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为无穷级数, a_n 称为通项或一般项, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ 称为级数的第 n 个部分和.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在且有限, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 其和为 S, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

否则就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 级数的收敛或发散性质统称为敛散性. 利用数列极限的性质可得

级数收敛的必要条件: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则通项 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 这是因为

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 \quad (n \to \infty).$$

级数收敛的充要条件 (Cauchy 准则): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall\, p \geqslant 1.$$

这时因为

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

对数列 $\{S_n\}$ 用 Cauchy 收敛准则即可.

例 8.1.1. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解. 我们计算其部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \ (n \to \infty),$$

故原级数收敛. □

例 8.1.2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 当 $n>1$ 时, $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$. 与前例类似, 有

$$0<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Big)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

由 Cauchy 准则, 原级数收敛 (事实上, 以后将证明其和为 $\pi^2/6$). □

例 8.1.3. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性 (调和级数).

解. 当 $n\geqslant 1$, 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

由 Cauchy 准则, 原级数发散. □

例 8.1.4. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 的敛散性.

解. 如果级数收敛, 则 $\sin n\to 0\ (n\to\infty)$. 利用等式

$$\sin(n+1)=\sin n\cdot\cos 1+\cos n\cdot\sin 1$$

知, 此时也有 $\cos n\to 0\ (n\to\infty)$. 但

$$\sin^2 n+\cos^2 n\equiv 1,$$

这就导出了矛盾, 从而说明原级数发散. □

例 8.1.5. 设 $q>0$, 则当 $q<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛; $q\geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 发散 (几何级数).

证明. 当 $0<q<1$ 时,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}q^k=q\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\to\frac{q}{1-q},$$

此时原级数收敛; 当 $q\geqslant 1$ 时, $q^n\nrightarrow 0$, 此时原级数发散. □

命题 8.1.1. (1) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\mu\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{R}).$$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

证明. 证明和数列极限的情形完全类似, 我们略去. □

习题 8.1

1. 研究下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}};$$
$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n(n+1)};\qquad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right);\qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{(-1)^n}{2n+2}\right).$$

2. 求下列级数之和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n});$$
$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}};$$
$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n};\qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 S_n. 如果 $S_{2n}\to S$, 且 $a_n\to 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. (提示: 用 Cauchy 准则.)

5. 设数列 na_n 收敛, 且级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也是收敛的.

6. 证明, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 也收敛. (提示: 用平均值不等式.)

7. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\alpha n+\beta)$ 的敛散性, 其中 α,β 为常数.

8. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为发散级数, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,\ 1\}$ 也发散.

9. 设 $\{a_n\}$ 为一列实数, 在 $[1,+\infty)$ 上分段定义函数 $f(x)$ 如下: 当 $x\in[k,k+1)$ 时, 令 $f(x)=a_k$ $(k=1,2,\cdots)$. 证明, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是无穷积分 $\int_1^{\infty}f(x)dx$ 收敛, 且收敛时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\int_1^{\infty}f(x)dx.$$

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛, 且

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\Big| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

11. 设 $|a_n| \leqslant b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

§8.2 正项级数收敛与发散的判别法

如果 $a_n > 0$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 此时, 部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 关于 n 是单调递增的. 因此有

(基本判别法) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

这个判别法对于 $a_n \geqslant 0$ 的级数当然也成立.

例 8.2.1. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)}$ 的敛散性.

解. 我们有如下估计

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)} &< \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot\sqrt{n+1}} \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} \\ &= 2\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big),\end{aligned}$$

从而

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot(k+1)} < 2\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) = 2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) < 2.$$

故原级数收敛. □

例 8.2.2. 设 $q > 1$ 为正整数, $0 \leqslant a_n \leqslant q-1$ ($\forall\, n \geqslant 1$), 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$$

收敛, 其和介于 0 和 1 之间.

证明. 当 $0 \leqslant a_n \leqslant q-1$ 时,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q^k} \\ &\leqslant (q-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} \\ &= 1 - q^{-n} < 1. \end{aligned}$$

因此级数收敛且和介于 0 与 1 之间. 如果 a_n 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots,$$

这也就是 $S \in [0,1]$ 的 q 进制小数表示. $q=10$ 时就是常用的 10 进制小数表示. $[0,1]$ 区间中的数都可以用 q 进制小数来表示, 但这种表示不是惟一的, 例如在十进制中

$$0.999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{10}\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1.$$

当 $q=2$ 时, a_n 只取 0 或 1. 在应用中, 我们可以用某些物质的特定状态来表示 0 或 1, 因而这些状态的不同组合就可以表示实数 (由于实际上的限制, 一般只能表示有理数). 由于这个原因, 二进制被广泛地应用于计算机和信息科学. □

定理 8.2.1 (比较判别法)**.** *设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $M>0$, 使得*

$$a_n \leqslant Mb_n, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{$*$}$$

则 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证明. 比较两级数的部分和并利用基本判别法即可. □

注. (1) 条件 $(*)$ 只要对充分大的 n 成立即可.

(2) 条件 $(*)$ 也可改写为

$$\frac{a_n}{b_n} \leqslant M,$$

M 的存在性通常用求极限的办法得到, 即, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

则有

(i) $0<\lambda<+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(ii) $\lambda=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; $\lambda=\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

(3) 另一个求 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 上界的方法是利用单调性, 即如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (\Longleftrightarrow \ \frac{a_n}{b_n} \text{ 单调递减})$$

则 (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

(4) (Cauchy 判别法或根值判别法) 在定理 8.2.1 中取 $b_n = q^n$ (q 是固定正数), 得到如下结果:

如果 n 充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

如果存在无穷多个 n, 使得 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

如何寻找 q 呢? 还是求极限比较方便: 设

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

则 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\lambda > 1$ 时, 级数发散 ($\lambda = 1$ 时无法判别).

(5) (d'Alembert 判别法或比值判别法) 在 (3) 中取 $b_n = q^n$, 得如下结果:

如果 n 充分大时, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

如果 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$(对充分大的 n 成立), 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当然, 还是求极限来寻找 q 比较容易. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

则 $\lambda < 1$ 时级数收敛, $\lambda > 1$ 时发散 ($\lambda = 1$ 时无法判别).

例 8.2.3. 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\right]$ 的敛散性.

解. 根据 Taylor 展开,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})\right] \Big/ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛. □

例 8.2.4. 设 $p \in \mathbb{R}$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{p}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解. 因为

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{p}{n}\right)^n \to e^{-p},$$

故 $p > 0$ 时原级数收敛; $p < 0$ 时级数发散. 显然, $p = 0$ 时级数也发散. □

例 8.2.5. 设 $x>0$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(\frac{x}{n})^n$ 的敛散性.

解. 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{x}{e},$$

故 $0<x<e$ 时级数收敛; $x>e$ 时级数发散. $x=e$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e/\big(1+\frac{1}{n}\big)^n\geqslant 1,$$

故此时级数也发散. □

在前面, 我们说明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为发散级数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 对于一般的实数 $s\in\mathbb{R}$, 如果判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 的敛散性? 这个问题可以用下面的办法解决.

定理 8.2.2 (积分判别法)**.** 设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数, 记 $a_n=f(n)$ $(n\geqslant 1)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性与广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性相同.

证明. 令

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt,\quad \forall\ x\geqslant 1.$$

因为 f 为单调递减函数, 故当 $n\leqslant x\leqslant n+1$ 时

$$a_{n+1}=f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)=a_n,$$

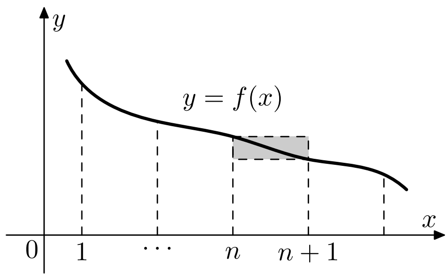


图 8.1 积分判别法

这说明

$$a_{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}f(t)dt\leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n\leqslant a_1+F(n),\quad F(n)\leqslant S_{n-1}.$$

其中 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 为级数的部分和. 因为 S_n 及 $F(n)$ 关于 n 都是单调递增的, 二者同时有界或无界, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散. □

例 8.2.6. 设 $s\in\mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\nrightarrow 0$, 故级数发散. $s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数, 且

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t^{-s}dt = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \dfrac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

当 $0 < s \leqslant 1$ 时, $F(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$; $s > 1$ 时, $F(x) \to \dfrac{1}{s-1}$ $(x \to +\infty)$. 这说明 $s \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 发散; $s > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 收敛.

注. $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 称为 Riemann-Zeta 函数, 这是一个非常重要的函数, 它和现代数论的关系特别紧密.

例 8.2.7. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^s}$ 的敛散性, 其中 $s \in \mathbb{R}$.

解. 当 $s \leqslant 0$ 时, 级数的一般项大于或等于 $\dfrac{1}{n+1}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散. 下设 $s > 0$. 令

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)(\ln(1+t))^s},$$

则 f 为非负单调递减函数, 且

$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{dt}{(1+t)(\ln(1+t))^s} \\ &= \begin{cases} \ln\ln(1+x) - \ln\ln 2, & s = 1, \\ \dfrac{1}{1-s}\left[(\ln(1+x))^{1-s} - (\ln 2)^{1-s}\right], & s \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 $s \leqslant 1$ 时原级数发散; $s > 1$ 时原级数收敛. □

现在, 如果在比较判别法中令 $b_n = \dfrac{1}{n^s}$ 或 $\dfrac{1}{n\ln n}$ 等, 就可以由此进一步得到新的判别法. 不过, 我们来介绍一个相当一般的判别法, 由此出发再得到两个新的判别法. 以下仍假设 λ 是常数.

定理 8.2.3 (Kummer)**.** *设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果 n 充分大时*

(1) $\dfrac{1}{b_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{b_{n+1}} \geqslant \lambda > 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) $\dfrac{1}{b_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{b_{n+1}} \leqslant 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明. (1) 条件可改写为

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big), \quad \forall\, n \geqslant N.$$

这说明当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned} S_{n+1} &\leqslant S_N + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) \\ &= S_N + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \\ &\leqslant S_N + \frac{1}{\lambda}\frac{a_N}{b_N}, \end{aligned}$$

即 $\{S_n\}$ 有上界, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leqslant 0$$

可知

$$\frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

即 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 关于 n 单调递增, 从而 $a_n \geqslant \frac{a_1}{b_1}b_n$, 因此由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. □

注. (1) 和前面一样, λ 的存在性用极限去判断较容易: 设

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \lambda,$$

则 $\lambda > 0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\lambda < 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

(2) 取 $b_n = 1$, 由 Kummer 判别法就得到了 d'Alembert 判别法.

(3) (Raabe) 取 $b_n = \dfrac{1}{n}$, 则得 (μ 为常数)

(i) $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant \mu > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii) $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Raabe 判别法当然也有极限形式 (略).

(4) (Gauss) 取 $b_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, 则得如下判别法: 假设 (θ 为常数)

$$(*)\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\Big(\frac{1}{n\ln n}\Big),$$

则 $\theta > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\theta \leqslant 1$ 时级数发散.

事实上, 由 Raabe 判别法, 只要考虑 $\theta = 1$ 的情形就可以了, 此时有

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{n\ln n\Big[1 + \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n\ln n}\Big)\Big] - (n+1)\ln(n+1)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n}{n+1} = -1 < 0. \end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 故由 Kummer 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

例 8.2.8. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$ $(\alpha>0)$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^s \cdot \frac{1}{2n+1}$.

解. (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\big(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\big) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\big(\frac{\alpha+n+1}{n+1}-1\big) = \alpha,$$

根据 Raabe 判别法, $\alpha>1$ 时原级数收敛, $\alpha<1$ 时发散. $\alpha=1$ 时, $a_n=\dfrac{1}{n+1}$, 此时原级数也发散.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \Big(\frac{2n+2}{2n+1}\Big)^s\frac{2n+3}{2n+1} = \big(1+\frac{1}{2n+1}\big)^s\big(1+\frac{2}{2n+1}\big)\\ &= \big(1+\frac{s}{2n+1}+O(\frac{1}{n^2})\big)\big(1+\frac{2}{2n+1}\big)\\ &= 1+\frac{s+2}{2n+1}+O(\frac{1}{n^2})\\ &= 1+\frac{(s+2)/2}{n}+O(\frac{1}{n^2}),\end{aligned}$$

根据 Gauss 判别法, 当 $s>0$ 时原级数收敛; $s\leqslant 0$ 时原级数发散. □

最后, 我们介绍一个单调递减正项级数的收敛性判别法, 它有时可以用来代替积分判别法.

例 8.2.9 (Cauchy 凝聚判别法)**.** 设 a_n 单调递减趋于零. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛.

证明. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$, $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. 当 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 时, 有

$$\begin{aligned}S_n &\geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})\\ &\geqslant a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}\\ &\geqslant \frac{1}{2}(a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k})\\ &= T_k/2.\end{aligned}$$

这说明当 S_n 有界时, T_n 也有界, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 也收敛. 类似地, 有

$$\begin{aligned}S_n &\leqslant a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})\\ &\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k}\\ &= T_k.\end{aligned}$$

从而当 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. □

下面的例子已经用积分判别法讨论过了, 我们用 Cauchy 凝聚判别法再看一下.

例 8.2.10. 讨论下列级数的敛散性 (p 为实数):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

解. 显然, 当 $p \leqslant 0$ 时级数都是发散的. 下设 $p > 0$. 因为 $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ 单调递减趋于零, 由 Cauchy 凝聚判别法, 只要考察下面的级数的敛散性:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)},$$

这是几何级数, 当 $2^{1-p} < 1$, 即 $p > 1$ 时收敛; 当 $2^{1-p} \geqslant 1$, 即 $p \leqslant 1$ 时发散.

第二个级数可类似处理, 考察级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (k \ln 2)^p} = (\ln 2)^{-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

根据刚才的讨论可知, 当 $p > 1$ 时级数收敛, 否则级数发散. □

习题 8.2

1. 判断下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}; \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}; \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \big(1-\cos\frac{1}{n}\big);$$
$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}; \quad (5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}; \quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

2. 判断下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}; \quad (3)\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}.$$

3. 判断下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}; \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$
$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^p \quad (a>1); \quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$$
$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \big(1-n\sin\frac{1}{n}\big)^p; \quad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{n}{2n+1}\big)^n.$$

4. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n} a_n$ 也收敛.

6. 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 总是收敛的;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

7. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 试用积分判别法证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n+1}}{S_n}$ 也发散, 其中 S_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和.

8. 判断下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p>0, q>0);$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}; \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})} \quad (a>0).$$

9. 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 总是收敛的;

(2) 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

10. 设 $a_n > 0$ 关于 n 单调递增. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\big)$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\big)$ 收敛.

11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \ln n}.$$

如果 n 充分大时 $\alpha_n \geqslant \mu > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 如果 n 充分大时 $\alpha_n \leqslant 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 这个结果称为 Bertrand 判别法.

12. 设 a_n 单调递减趋于零, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, \frac{1}{n}\}$ 也发散.

13. 构造一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得它有无限项满足条件 $a_{n_k} \geqslant \dfrac{1}{n_k}$.

14. (*) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 则存在另一收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

15. (*) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的正项级数, 则存在另一发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

16. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n})$ 也收敛.

17. (*) 设 $a_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 也收敛.

§8.3 一般级数收敛与发散判别法

在第五章中, 利用 Taylor 公式我们曾得到如下等式:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

上面两个级数的特点是正负项交替出现, 我们将这样的级数称为**交错级数**.

定理 8.3.1 (Leibniz)**.** *设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.*

证明. 我们利用 Cauchy 准则来证明. 考虑 $S_{n+p} - S_n$:

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此当 $p = 2k - 1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leqslant a_{n+1}, \\ (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + a_{n+2k-1} \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

这说明

$$(*)\quad |S_{n+p}-S_n|\leqslant a_{n+1}\to 0\ (n\to\infty).$$

当 $p=2k$ 时, 类似地可证上式仍成立. 因此原级数收敛. □

注. 在 $(*)$ 中令 $p\to\infty$ 得

$$|S-S_n|\leqslant a_{n+1},$$

其中 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 为级数的和, 这是交错级数的误差估计.

例 8.3.1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

证明. 这是因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 单调减趋于零, 由 Leibniz 判别法即知级数收敛. □

为了得到更一般的结果, 我们需要一个分部求和的技巧, 这个技巧其实在第六章第二节 (第二积分中值定理) 中已经用过了.

引理 8.3.2 (分部求和)**.** 设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)+\sum_{k=m}^{n-1}b_k(a_{k+1}-a_k)=a_nb_n-a_mb_m.$$

证明. 将欲证左式两项合并, 然后利用裂项相消法即可:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)+\sum_{k=m}^{n-1}b_k(a_{k+1}-a_k)\\
&=\sum_{k=m}^{n-1}[a_{k+1}b_{k+1}-a_{k+1}b_k+b_ka_{k+1}-b_ka_k]\\
&=\sum_{k=m}^{n-1}(a_{k+1}b_{k+1}-a_kb_k)\\
&=a_nb_n-a_mb_m.
\end{aligned}$$

引理证毕. □

例 8.3.2. 分部求和公式的简单应用.

如果取 $a_k=b_k=k$, 代入分部求和公式, 得

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)+\sum_{k=0}^{n-1}k=n^2-0,$$

即

$$2\sum_{k=1}^{n}k=n^2+n,$$

这就得到公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

类似地, 如果令 $a_k=k^2$, $b_k=k$ 代入, 则得

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2+\sum_{k=0}^{n-1}k(2k+1)=n^3,$$

整理以后就得到公式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

读者可以用这个办法继续求和. □

如果约定 $b_0=0$, 记

$$B_0=0,\ B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k\quad(k\geqslant 1),$$

并用 B_k 代替上述分部求和公式中的 b_k, 则得到

推论 8.3.3 (Abel 变换). *设 a_i, b_i $(i\geqslant 1)$ 为两组实数, 则有*

$$\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n-a_{m+1}B_m,\quad\forall\ m\geqslant 0. \tag{8.1}$$

证明. 这可由分部求和公式得到, 也可直接计算如下

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i&=\sum_{i=m+1}^{n}a_i(B_i-B_{i-1})=\sum_{i=m+1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=m+1}^{n}a_iB_{i-1}\\&=\sum_{i=m+1}^{n}a_iB_i-\sum_{i=m}^{n-1}a_{i+1}B_i\\&=\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n-a_{m+1}B_m.\end{aligned}$$

推论 8.3.4 (Abel 引理). *设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为单调数列, 且 $|B_i|\leqslant M$ $(i\geqslant 1)$, 则*

$$\Big|\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i\Big|\leqslant 2M(|a_n|+|a_{m+1}|),\quad\forall\ m\geqslant 0.$$

证明. 由 (8.1) 得

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i\Big|&\leqslant M\sum_{i=m+1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)\\&=M\Big|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})\Big|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)\\&=M|a_{m+1}-a_n|+M(|a_n|+|a_{m+1}|)\\&\leqslant 2M(|a_{m+1}|+|a_n|).\end{aligned}$$

其中, 在第一个等号处我们用到了 $\{a_i\}$ 的单调性. □

定理 8.3.5 (Dirichlet)**.** 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明. 由假设, 存在 $M > 0$ 使得

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} b_i\Big| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\Big|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\Big| \leqslant 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leqslant 4M|a_{n+1}| \to 0.$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

注. 如果在 $[1, +\infty)$ 上分段地定义函数 $f(x), g(x)$ 如下: 当 $x \in [k, k+1)$ 时, 令 $f(x) = a_k$, $g(x) = b_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足第七章第三节关于广义积分的 Dirichlet 定理的条件, 因而 $f(x)g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的广义积分收敛, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. 这说明数项级数的 Dirichlet 定理可以看成广义积分的 Dirichlet 定理的推论. 下面的 Abel 定理也是如此.

定理 8.3.6 (Abel)**.** 如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明. $\{a_n\}$ 单调有界意味着极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 由 Dirichlet 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$ 收敛. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot b_n$$

也收敛. □

例 8.3.3. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

解. $a_n = \dfrac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, $b_n = \sin nx$. 利用公式

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x$$

得

$$\sum_{k=1}^{n} b_n = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \big(\cos\dfrac{x}{2} - \cos(n + \dfrac{1}{2})x\big)/2\sin\dfrac{x}{2}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

即 b_n 的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛. □

例 8.3.4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明. 记 $a_n = \dfrac{1}{n}\cdot(na_n)$, 而 $\dfrac{1}{n}$ 单调趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 故由 Abel 判别法, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. □

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 8.3.1 (绝对收敛)**.** 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 (此时, 由于

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}| \to 0,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的确为收敛级数).

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**.

例 8.3.5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解. 令 $a_n = \dfrac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$. 故 $|x|<1$ 时原级数绝对收敛; 而 $|x|>1$ 时显然发散. $x=1$ 时级数条件收敛; $x=-1$ 时级数发散. □

习题 8.3

1. 判断下列级数的敛散性:

$$\text{(1)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n};\qquad \text{(2)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\big(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big);$$
$$\text{(3)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln n};\qquad \text{(4)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}};$$
$$\text{(5)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1});\qquad \text{(6)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\ln n}\big).$$

2. 在分部求和公式中令 $a_k=k^3$, $b_k=k$, 求 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ 的表达式.

3. 在 Abel 引理的条件下, 证明

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leqslant M(|a_1|+2|a_n|).$$

4. 在 Abel 引理的条件下, 当 $\{a_i\}$ 非负单调递减时, 证明

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leqslant M a_1.$$

5. 判断下列级数的敛散性, 如果收敛的话是条件收敛还是绝对收敛:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n!};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}};$$
$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\big(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\big);\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+x^2});$$
$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1);\qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{x+\frac{1}{n}}},\ x\in\mathbb{R}.$$

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, $\{b_n\}$ 为有界数列, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也是绝对收敛的.

7. (*) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 是否也收敛？证明你的结论.

8. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛且 a_n 极限为零, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. (提示: Abel 求和.)

9. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛.

10. 设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零. 证明下面的级数是收敛的:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

12. (*) 设 $a_n>0$, na_n 单调趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $n\ln n\cdot a_n\to 0$.

13. 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$ $(n\geqslant 1)$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 均收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收敛.

§8.4 数项级数的进一步讨论

本节内容可以作为选读材料.

§8.4.1 级数求和与求极限的可交换性

我们可以把级数的和看成是其部分和的极限, 也就是一个数列极限. 现在我们考虑这样的问题: 如果有一列数项级数, 它们的和就是一列数, 这一列数的极限有何性质? 为此, 我们考虑依赖于指标 i, j $(i, j = 1, 2, \cdots)$ 的实数 a_{ij}.

定义 8.4.1 (级数的一致收敛)**.** 一列收敛级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$ 关于 i 一致收敛是指, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时,

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A_i\Big| < \varepsilon, \quad \forall\ i \geqslant 1. \tag{8.2}$$

定理 8.4.1. 设一列级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$ 关于 i 一致收敛, 如果 $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij} = a_j$ $(j \geqslant 1)$, 则极限 $\lim\limits_{i\to\infty} A_i$ 存在, 级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

或改写为

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty} a_{ij}.$$

证明. 由一致收敛的定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n \geqslant N_0$ 时,

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A_i\Big| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad \forall\ i \geqslant 1.$$

因此, 当 $m > n \geqslant N_0$ 时

$$\Big|\sum_{j=n+1}^{m} a_{ij}\Big| \leqslant \Big|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - A_i\Big| + \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A_i\Big| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ i \geqslant 1.$$

在上式中令 $i \to \infty$, 得

$$\Big|\sum_{j=n+1}^{m} a_j\Big| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

由 Cauchy 准则即知级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且在上式中令 $m \to \infty$ 可得

$$\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\Big| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ n \geqslant N_0.$$

对于 $j = 1, 2, \cdots, N_0$, 因为 $a_{ij} \to a_j$, 故存在 N, 当 $i > N$ 时,

$$|a_{ij} - a_j| < \frac{\varepsilon}{4N_0}, \quad j = 1, 2, \cdots, N_0.$$

因此, 当 $i > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Big|A_i-\sum_{i=1}^{\infty}a_j\Big| &\leqslant \Big|A_i-\sum_{j=1}^{N_0}a_{ij}\Big|+\Big|\sum_{j=1}^{N_0}a_{ij}-\sum_{j=1}^{N_0}a_j\Big|+\Big|\sum_{j=N_0+1}^{\infty}a_j\Big|\\ &< \frac{1}{4}\varepsilon+N_0\frac{\varepsilon}{4N_0}+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\{A_i\}$ 的极限存在且极限为 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$. □

注. 这个结果给出了求极限与求和这两个运算可交换次序的一个充分条件.

推论 8.4.2. 设 $\lim\limits_{i\to\infty}a_{ij}=a_j\ (j\geqslant 1)$, $|a_{ij}|\leqslant b_j\ (i\geqslant 1)$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ 收敛, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty}a_{ij}=\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}.$$

证明. 由 $a_{ij}\to a_j$, 且 $|a_{ij}|\leqslant b_j$ 知 $|a_j|\leqslant b_j$, $j=1,2,\cdots$. 因为级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j$ 绝对收敛. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$0\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}b_j<\varepsilon.$$

此时, 对任意 $i\geqslant 1$, 有

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\Big|=\Big|\sum_{j=n+1}^{\infty}a_{ij}\Big|\leqslant\sum_{j=n+1}^{\infty}b_j<\varepsilon,$$

从而级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ 关于 i 是一致收敛的. 由上一定理知本推论结论成立. □

注. 这个结果可以称为级数和的控制收敛定理, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j$ 称为控制级数.

推论 8.4.3. 设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\leqslant A_j\ (j\geqslant 1)$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}A_j$ 收敛, 则对任意 $i\geqslant 1$, 级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ 收敛, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}.$$

证明. 首先, 由题设知, $|a_{ij}|\leqslant A_j$, $j=1,2,\cdots$. 这说明, 对任意 $i\geqslant 1$, 级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ 是绝对收敛的. 因为

$$\Big|\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_{ij}|\leqslant A_j,\quad j\geqslant 1.$$

故由上一推论, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} &= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}.\end{aligned}$$

这就证明了本推论. □

注. 这个推论给出了两个无穷求和运算可交换次序的一个充分条件.

例 8.4.1. 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 记 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$, $x\in[-1,1]$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta(n),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 *Riemann-Zeta* 函数.

证明. 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{m^n}\leqslant\frac{1}{m^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|,\quad\forall\ m\geqslant 1,$$

而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}m^{-2}$ 收敛, 由推论 8.4.3 得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{m^n},$$

即

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta(n)=\sum_{m=1}^{\infty}f(\frac{1}{m}).$$

利用这个例子, 我们可以给出 $\ln 2$ 的两个不同的级数表示. 首先, 由

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$$

得

$$\begin{aligned}\ln 2 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^k dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-x)^k dx\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}$$

上式也可以改写为

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)},$$

如果考虑函数

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n = \frac{x^2}{2(2-x)},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{2(2-n^{-1})} = \ln 2.$$

因此, 根据刚才的例子, 有

$$\ln 2 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\zeta(n),$$

这就是 $\ln 2$ 的另一个级数表示, 它的好处是收敛速度较快. □

§8.4.2 级数的乘积

我们在前面考虑了收敛级数的线性运算性质, 现在我们考虑级数的乘法运算性质. 对于有限个数的和的乘积, 显然有

$$(a_0+a_1+\cdots+a_m)(b_0+b_1+\cdots+b_n) = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i+j=k}a_ib_j.$$

对于无穷级数, 我们作如下推广: 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 为两个级数, 定义它们的乘积为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$, 其中

$$c_n = \sum_{i+j=n}a_ib_j,\quad n\geqslant 0.$$

这种乘积也称为级数的 Cauchy 乘积.

定理 8.4.4 (Cauchy)**.** 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则它们的乘积级数也绝对收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

证明. 这个定理的证明留作习题. □

注. 在定理的条件下不难看出, 将 $\{a_i b_j\}$ 任意排列次序, 得到的级数仍 (绝对) 收敛, 且其和不变.

我们现在将 Cauchy 定理的条件减弱, 这时下面的结果仍然成立.

定理 8.4.5 (Mertens)**.** 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛, 且至少其中一个级数绝对收敛, 则它们的乘积级数也收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

证明. 不妨设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 分别记

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

则 $A_n \to A$, $B_n \to B$, 而

$$C_n = \sum_{i+j\leqslant n} a_i b_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = A_n B + \delta_n,$$

其中

$$\delta_n = a_0(B_n - B) + a_1(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_0 - B).$$

我们只要证明 $\delta_n \to 0$ 即可. 因为 $B_n \to B$, 故 $\{B_n\}$ 关于 n 有界, 从而存在 K, 使得

$$|B_n - B| \leqslant K, \quad \forall\, n \geqslant 0.$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时

$$|a_{N_0+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

记 $L = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{N_0}|$. 由于 $B_n - B \to 0$, 故存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2L+1}.$$

从而当 $n > N_0 + N_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\delta_n| &\leqslant \sum_{k=0}^{N_0} |a_k||B_{n-k} - B| + (|a_{N_0+1}| + \cdots + |a_n|)K \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2L+1}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{N_0}|) + \frac{\varepsilon}{2K+1}K \\ &= \frac{\varepsilon}{2L+1}L + \frac{\varepsilon}{2K+1}K \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\delta_n \to 0$, 因而 $C_n = A_nB + \delta_n \to AB$. □

注. 定理中的绝对收敛的条件不能去掉, 反例就是将 a_n 和 b_n 均取为交错级数 $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 此时所得乘积级数是发散的. 但是, 如果乘积级数仍然收敛, 则其和等于两个级数和的乘积. 为了说明这一点, 需要下面的引理.

引理 8.4.6 (Abel)**.** 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C$ 收敛, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0,1),$$

则 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = C$.

证明. 级数收敛表明 $\{c_n\}$ 有界, 因此当 $x \in [0,1)$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 绝对收敛. 记

$$C_{-1} = 0, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad n \geqslant 0.$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} c_k x^k &= \sum_{k=0}^{n} (C_k - C_{k-1})x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k - x\sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + C(1-x^n) + (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} (C_k - C)x^k.\end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$ 就得到

$$f(x) = C + (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} (C_k - C)x^k.$$

因为 $C_k - C \to 0$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $k > N$ 时

$$|C_k - C| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

令 $M = \sum\limits_{k=0}^{N} |C_k - C|$, 则有估计

$$|f(x) - C| \leqslant M(1-x) + (1-x)\sum_{k=N+1} \frac{1}{2}\varepsilon x^k \leqslant M(1-x) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此, 当 $0 < 1 - x < \dfrac{\varepsilon}{2M+1}$ 时,

$$|f(x) - C| \leqslant M\frac{\varepsilon}{2M+1} + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = C$. □

定理 8.4.7 (Abel)**.** 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 以及它们的乘积 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 均收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

证明. 当 $x \in [0, 1)$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 绝对收敛, 它们的乘积级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. 根据 Cauchy 定理, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big).$$

令 $x \to 1^-$, 由上述 Abel 引理即得欲证结论. □

例 8.4.2. $\ln 2$ 的级数展开的乘积.

我们已经得到 $\ln 2$ 的如下展开

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

因此其 Cauchy 乘积为

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{(i+1)(j+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+2} \sum_{i+j=n}\Big(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n+1}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

不难验证数列 $c_n = \dfrac{1}{n+1}\big(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\big)$ 单调递减趋于零, 因此上述乘积级数收敛, 从而得到了下面的等式

$$\frac{1}{2}(\ln 2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\big).$$

例 8.4.3. 指数函数 e^x 的级数定义.

假设我们事先不知道指数函数的级数展开, 先定义函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

则 $f(0)=1$, 且

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!},$$

利用二项式展开, 有

$$\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

代入前式就得

$$f(x)f(y) = f(x+y),\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

这个连续函数的方程的解必形如 $f(x)=a^x$, 而 $a=f(1)=e$. 即我们用级数定义了指数函数 e^x.

三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 也可以这么定义. □

§8.4.3 乘积级数

我们将级数定义中的加法运算改为乘积运算, 就可以得到一种新的级数, 它们的性质与加法级数的性质十分类似. 为此, 设

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$$

是一列实数, 我们将形式积

$$\prod_{n=1}^{\infty}p_n = p_1\cdot p_2\cdots p_n\cdots$$

称为无穷乘积. 记

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}p_k,\quad n\geqslant 1$$

称为部分乘积. 如果数列 $\{P_n\}$ 的极限存在, 且极限为有限或为正无穷, 或为负无穷, 则此极限称为无穷乘积的值, 记为

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n.$$

当极限为有限且非零时, 称无穷乘积是收敛的, 否则就称它是发散的.

如果某个 p_n 为零, 则显然无穷乘积为零. 下面我们假设 p_n 均为非零实数. 设无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = P/P = 1,$$

特别地, 当 n 充分大时, 必有 $p_n > 0$. 因为去掉有限项后不影响敛散性, 因此下面进一步假设 $p_n > 0$, $\forall\ n \geqslant 1$.

由于

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln p_k},$$

因此, 我们可以将无穷乘积化为无穷级数加以讨论, 我们有

命题 8.4.8. *设 $p_n > 0$, $\forall\ n \geqslant 1$. 则*

(1) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 且

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n};$$

(2) 记 $p_n = 1 + a_n$. 如果 n 充分大时 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$), 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(3) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 均收敛, 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 也收敛.

证明. (1) 是显然的. (2) 只要利用

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

以及数项级数的比较判别法即可. (3) 则是利用 (a_n 不为零时)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[a_n - \ln(1 + a_n)]}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

以及 (1). □

例 8.4.4. *Wallis* 公式的乘积表示.

我们在第六章第三节中得到了如下 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big]^2\frac{1}{2n+1},$$

它可以改写为

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\Big),$$

或

$$\frac{\pi}{4}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}.$$

例 8.4.5. *Riemann-Zeta* 函数的乘积表示.

设 $\{p_n\}$ 为素数全体, 则由

$$\frac{1}{1-p_n^{-s}}=1+\frac{1}{p_n^s}+\frac{1}{p_n^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p_n^{ms}}+\cdots$$

以及整数的因子分解定理不难看到

$$(1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}\cdots(1-p_n^{-s})^{-1}\cdots=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

即

$$\zeta(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{p_n^s}\Big)^{-1}.$$

例 8.4.6. 双曲正弦函数 $\sinh x$ 的乘积表示.

按照定义, 有

$$e^x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sinh x+\cosh x,$$

因此

$$\begin{aligned}e^{(2n+1)x}&=(\sinh x+\cosh x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^k(\cosh x)^k(\sinh x)^{2n+1-k}\\&=\sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{2l}(\cosh x)^{2l}(\sinh x)^{2n+1-2l}+\sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{2l+1}(\cosh x)^{2l+1}(\sinh x)^{2n-2l},\end{aligned}$$

利用等式 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ 并考虑函数的奇偶分解, 我们就得到等式

$$\sinh(2n+1)x=\sinh x\sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{2l}(\sinh^2 x+1)^l(\sinh^2 x)^{n-l}.$$

同理, 如果利用 $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ 将可得到

$$\sin(2n+1)x = \sin x \sum_{l=0}^{n} C_{2n+1}^{2l}(1-\sin^2 x)^l(-\sin^2 x)^{n-l}.$$

由此可知, 多项式 $P(y) = \sum\limits_{l=0}^{n} C_{2n+1}^{2l}(y+1)^l y^{n-l}$ 具有下列根

$$-\sin^2\big(\frac{k\pi}{2n+1}\big), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

这也是 $P(y)$ 的所有不同的根, 因此

$$P(y) = C\prod_{k=1}^{n}\big(y + \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\big),$$

其中

$$C = \sum_{l=0}^{n} C_{2n+1}^{2l} = \sum_{l=0}^{n} C_{2n+1}^{2n+1-2l} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} = 2^{2n},$$

进而通过比较常数项还可以得到等式

$$2n+1 = 2^{2n}\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}.$$

总结一下, 我们有

$$\sinh(2n+1)x = 2^{2n}\sinh x\prod_{k=1}^{n}\big(\sinh^2 x + \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\big),$$

或改写为

$$\sinh x = (2n+1)\sinh\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{\sinh^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}} + 1\Big),$$

在上式中令 $n \to \infty$, 得

$$\sinh x = x\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^2}{n^2\pi^2} + 1\Big), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

类似地可以得到

$$\cosh x = \prod_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{x^2}{(\frac{2k-1}{2}\pi)^2} + 1\Big], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{8.4}$$

§8.4.4 级数的重排

现在我们讨论将级数的各个项重新排列次序后得到的新的级数的收敛和发散性质. 首先, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 则由基本判别法不难看出, 将它的各项重新

排列后不会影响其敛散性, 如果收敛的话重排也不改变级数的和. 对于一般的级数, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则重排后的级数也绝对收敛, 且其和不变. 这可以从等式

$$a_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2} = a_n^+ - a_n^-$$

以及正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的收敛性推出.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则级数重排后即使收敛, 它的和也可能变化.

例 8.4.7. $\ln 2$ 的级数表示的重排.

将级数

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

重排为

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots,$$

则它的和为

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

实际上, 对于条件收敛的级数, 可以将它重排使得其和为任意实数.

定理 8.4.9 (Riemann)**.** *如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛的级数, 则可以将它重排为一个收敛级数, 使得重排后的级数和为任意指定的实数.*

证明. 设 $\xi \in \mathbb{R}$, 我们将找到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排, 使得它的和为 ξ. 首先我们注意到, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 由 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$ 即知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 均发散到 $+\infty$, 这两个级数的部分和为别记为 S_n^+ 和 S_n^-. 因为当 n 充分大时 $S_n^+ > \xi$, 故可取最小的正整数 m_1, 使得

$$S_{m_1}^+ > \xi,$$

此时成立

$$\xi \geqslant S_{m_1}^+ - a_{m_1}^+.$$

因为 n 充分大时, $S_{m_1}^+ - S_n^- < \xi$, 故可取最小的正整数 n_1, 使得

$$S_{m_1}^+ - S_{n_1}^- < \xi,$$

同理有

$$\xi \leqslant S_{m_1}^+ - S_{n_1}^- + a_{n_1}^-.$$

下面再取最小的正整数 m_2, 使得

$$S^+_{m_2} - S^-_{n_1} > \xi \geqslant S^+_{m_2} - S^-_{n_1} - a^+_{m_2},$$

以及最小的正整数 n_2, 使得

$$S^+_{m_2} - S^-_{n_2} < \xi \leqslant S^+_{m_2} - S^-_{n_2} + a^-_{n_2}.$$

如此继续下去, 我们得到递增数列 $m_1 < m_2 < \cdots$ 和 $n_1 < n_2 < \cdots$, 使得

$$S^+_{m_k} - S^-_{n_{k-1}} > \xi \geqslant S^+_{m_k} - S^-_{n_{k-1}} - a^+_{m_k}$$

和

$$S^+_{m_k} - S^-_{n_k} < \xi \leqslant S^+_{m_k} - S^-_{n_k} + a^+_{n_k}$$

对任意 k 均成立. 由 $a_n \to 0$ 即知, 下面的级数

$$\begin{aligned} &a^+_1 + \cdots + a^+_{m_1} - a^-_1 - \cdots - a^-_{n_1} + a^+_{m_1+1} + \cdots + a^+_{m_2} \\ &- a^-_{n_1+1} - \cdots - a^-_{n_2} + a^+_{m_2+1} + \cdots + a^+_{m_3} - a^-_{n_2+1} - \cdots \end{aligned}$$

收敛到 ξ. 注意 a^+_n 和 a^-_n 在这个级数中都依次出现了, 因此它可以看成是原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排. □

注. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则可以将它重排为发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的级数, 这个结论请读者自行证明.

习题 8.4

1. 设 $\lim\limits_{i\to\infty} n(i) = +\infty$, 且当 i 充分大时, $|a_{ij}| \leqslant A_j$, $j = 1, 2, \cdots, n(i)$. 如果 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ 收敛, 则当 $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ij}$ 存在时, 有

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{n(i)} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i\to\infty} a_{ij}.$$

2. 设 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = A_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 收敛, 则下列等式有意义:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

3. 证明 Riemann-Zeta 函数满足下列等式

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\zeta(n) - 1] = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\zeta(2n) - 1] = \frac{3}{4}.$$

4. 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^{-n}|a_n|$ 收敛, 记 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$, $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. 则

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(\frac{1}{n})=\sum_{n=2}^{\infty} a_n[\zeta(n)-1].$$

5. 证明等式

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\Big]=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n}-\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)\Big]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n).$$

6. 证明等式

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\Big]=1+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{1}{n}+\ln\big(1-\frac{1}{n}\big)\Big]=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\zeta(n)-1)}{n}.$$

7. 给出关于级数乘积的 Cauchy 定理的证明.

8. 利用级数的乘积证明, 当 $|x|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

9. 证明等式

$$\big(\frac{\pi}{4}\big)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\big(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\big).$$

10. 证明下列等式

$$(1)\ \prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\frac{1}{4n^2}\big)=\frac{2}{\pi};\quad (3)\ \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x};$$

$$(2)\ \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x}\ \ (|x|<1).$$

11. 证明, 当 $\alpha>\beta>0$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}=0.$$

12. 记 $2=p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$ 为素数全体, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 是发散的.

第九章　函数项级数

在对函数作 Taylor 展开时, 自然就出现了以函数为一般项的无穷级数, 在前一章最后一节中我们实际上也用到了简单的函数项级数, 下面我们就来研究一般的函数项级数的敛散性. 这种对于一列函数的无穷求和也可以看成是关于函数的运算, 跟积分运算一样, 它提供了构造非初等函数的手段.

§9.1　一致收敛

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 中定义的一列函数. 如果存在 I 中的函数 $g(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0),\quad \forall\ x_0 \in I,$$

则称函数列 $\{g_n\}$ 收敛于 g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 或 $g_n \to g\ (n\to\infty)$.

例 9.1.1. 考虑 $g_n(x) = x^n$, $x\in(0,1)$. 因为对任意固定的 $x_0\in(0,1)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$. □

定义 9.1.1 (一致收敛)**.** 如果任给 $\varepsilon>0$, 均存在与 $x\in I$ 无关的正整数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N$ 时

$$|g_n(x)-g(x)|<\varepsilon,\quad \forall\ x\in I, \tag{$*$}$$

则称函数列 $\{g_n\}$ 在 I 中一致收敛于 g, 记为 $g_n \rightrightarrows g$.

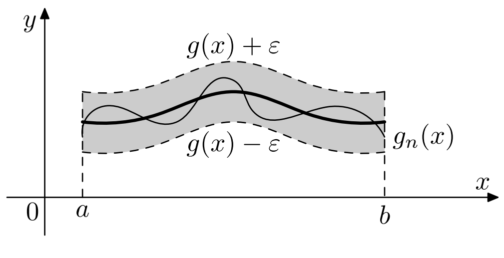


图 9.1　一致收敛

显然, 一致收敛的函数列是收敛的. 一致性体现在 $(*)$ 式对于充分大的 n 和任意 x 均成立. 例 9.1.1 中 $\{g_n\}$ 不是一致收敛的 (为什么?).

例 9.1.2. 设 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. 讨论 $\{g_n\}$ 的收敛性.

解. 当 $0 < |x| \leqslant 1$ 时

$$|g_n(x) - 0| = \frac{|x|}{|1 + n^2x^2|} \leqslant \frac{|x|}{2n|x|} = \frac{1}{2n},$$

上式对 $x = 0$ 也成立. 因此 $\{g_n\}$ 在 $[-1, 1]$ 中一致收敛于 0. □

定理 9.1.1. 设 $\{g_n\}$ 在区间 I 中一致收敛于 g. 如果 g_n 均为连续函数, 则 g 也是连续函数.

证明. 任取 $x_0 \in I$, 我们要证明 g 在 x_0 处连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛定义, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in I.$$

取定 $n_0 = N + 1$, 由于 g_{n_0} 在 I 中连续, 故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得

$$|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

因此

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| &\leqslant |g(x) - g_{n_0}(x)| + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| \\ &\quad + |g_{n_0}(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.\end{aligned}$$

这说明 g 在 x_0 处是连续的. □

注. 我们实际上证明了, 如果 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g, 且每个函数 g_n 均在 x_0 处连续, 则 g 也在 x_0 处连续, 这也可以表示为

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} g_n(x),$$

一致收敛在这里保证了求极限次序的可交换性. 一般地, 我们有

定理 9.1.2. (∗) 设 $\{g_n\}$ 在 $x_0 \in I$ 的一个空心邻域中一致收敛于 g. 如果

$$\lim_{x \to x_0} g_n(x) = a_n, \quad \forall\, n \geqslant 1,$$

则极限 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 以及 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 均存在, 且这两个极限相等, 即

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} g_n(x).$$

证明. 由 $\{g_n\}$ 一致收敛到 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \neq x_0.$$

因此当 $m,n>N_0$ 时

$$|g_m(x)-g_n(x)|\leqslant|g_m(x)-g(x)|+|g(x)-g_n(x)|<2\varepsilon,$$

在上式中令 $x\to x_0$, 得

$$|a_m-a_n|\leqslant 2\varepsilon,\ \ \forall\ m,\ n>N_0.$$

由 Cauchy 准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在.

下证 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$. 任给 $\varepsilon>0$, 由刚才的证明, 存在 N, 使得

$$|a_N-A|<\frac{\varepsilon}{3},\ \ |g(x)-g_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ \ \forall\ x\neq x_0.$$

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}g_N(x)=a_N$, 故存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|g_N(x)-a_N|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|g(x)-A|\leqslant|g(x)-g_N(x)|+|g_N(x)-a_N|+|a_N-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$. □

注. 这个定理和前一定理所用的论证方法称为 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ - 法, 这种方法在前面的章节中也曾用过.

由一致收敛定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式:

(Cauchy 准则) 定义在 I 中的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $m,n>N$ 时

$$|g_m(x)-g_n(x)|<\varepsilon,\ \ \forall\ x\in I.$$

注意, 当 $\{g_n\}$ 满足上式时, 对于每一个固定的 $x_0\in I$, $\{g_n(x_0)\}$ 都是 Cauchy 数列, 因此收敛, 其极限记为 $g(x_0)$. 这样就得到了极限函数 g, 并且 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g (为什么?).

现在, 设 $\{f_n(x)\}$ 为一列函数, 考虑形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, 这种形式和称为函数项级数. 如果部分和 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$ 收敛, 则称该函数项级数收敛; 如果 $S_n(x)$ 一致收敛, 则称该函数项级数一致收敛. 根据上面的讨论, 我们有:

(1) 如果 f_n 均为连续函数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 也是连续函数;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛当且仅当任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得 $n>N$ 时

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon,\ \ \forall\ x\in I,\ \forall\ p\geqslant 1.$$

例 9.1.3. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 中的收敛性质.

解. 在前一章第三节已用 Dirichlet 判别法说明对任意 $x\in[0,2\pi]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 均收敛. 下面说明它不是一致收敛的. 事实上, 取 $x_n=\dfrac{\pi}{4n}$, 则

$$\begin{aligned}|S_{2n}(x_n)-S_n(x_n)|&=\left|\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2n}\right|\\&\geqslant n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知收敛不是一致的. □

下面的两个结果是前一章最后一节数项级数相应结果的推论, 我们省略证明.

定理 9.1.3. 设 $\{f_{mn}(x)\}$ 是依赖于指标 m,n 的一族函数, 对于每个 $n\geqslant 1$, 均有 $\lim\limits_{m\to\infty}f_{mn}(x)=f_n(x)$, 且对任意 $m\geqslant 1$, $|f_{mn}(x)|\leqslant F_n(x)$, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}f_{mn}(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{mn}(x).$$

定理 9.1.4. 设 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|f_{mn}(x)|\leqslant F_n(x)$ $(n\geqslant 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ 收敛, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{mn}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f_{mn}(x).$$

函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到. 例如:

(1) (Weierstrass) 如果 $|f_n(x)|\leqslant M_n$, 而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛. 这是因为

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant M_{n+1}+\cdots+M_{n+p},$$

然后利用 Cauchy 准则即可.

(2) (Dirichlet) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和 $B_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)$ 一致有界, 即存在 $M>0$, 使得

$$|B_n(x)|\leqslant M,\quad \forall\ x\in I,\ \forall\ n\geqslant 1.$$

并且对每个 $x\in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, $a_n(x)\rightrightarrows 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 中一致收敛. 其证明只要照搬数项级数中的相应证明即可.

(3) (Abel) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 中一致收敛, 且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 且在 I 中一致有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 中一致收敛. 其证明仍然是 Abel 变换的运用, 然后再利用 Cauchy 准则:

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leqslant 3 \sup |a_n| \cdot \sup_{1 \leqslant k \leqslant p} |b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+k}(x)|.$$

例 9.1.4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 在 $x \in [0,1]$ 中一致收敛.

证明. 取 $a_n(x) = x^n$, $b_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 关于 x 一致收敛. 而 $|a_n(x)| \leqslant 1$, $\forall\, x \in [0,1]$. 对固定的 x, $a_n(x) = x^n$ 关于 n 单调. 故由 Abel 判别法知原级数一致收敛. □

命题 9.1.5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 一致收敛, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x))$ 也一致收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

证明. 用一致收敛的定义即可. □

定理 9.1.6 (Dini). 设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 中非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, 我们要证明存在 N, 使得当 $n > N$ 时

$$0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

即要证 n 充分大以后 $A_n = \{x \in [a,b] \,|\, g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ 为空集. 因为 g_n 关于 n 单调递减, 因此

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots, \tag{9.1}$$

这说明我们只要证明某一个 A_n 是空集即可.

(反证法) 假设 A_n 均非空集, 取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$, 设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$. 由 (9.1) 知 $A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots\}$. 因为 g_k 在 x_0 处连续, 我们有

$$g_k(x_0) = \lim_{k \leqslant i \to \infty} g_k(x_{n_i}) \geqslant \varepsilon.$$

上式对任意 $k \geqslant 1$ 均成立, 这和 $g_n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ 相矛盾. □

推论 9.1.7. 设 $f_n(x)$ 为非负连续函数, 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间中收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

证明. 考虑部分和 $S_n(x)$ 及连续函数列 $f(x) - S_n(x)$, 应用 Dini 定理即可. □

注. 注意, 推论中 f 的连续性条件是不能去掉的. 例如, 考虑 $[0,1]$ 区间上的函数列 $f_1(x) = 1 - x$, $f_n(x) = x^{n-1} - x^n$ $(n \geqslant 2)$ 即可得到反例.

例 9.1.5. *Riemann-Zeta* 函数的连续性.

当 $s > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 收敛, 其和 $\zeta(s)$ 可以看成 $(1, +\infty)$ 中的函数. 虽然函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 在整个区间 $(1, +\infty)$ 中不是一致收敛的, 但在任何闭区间 $I \subset (1, +\infty)$ 上都是一致收敛的, 因此 $\zeta(s)$ 在 I 中连续, 从而也是整个定义域 $(1, +\infty)$ 中的连续函数. □

习题 9.1

1. 在区间 $[0,1]$ 中递归地定义函数列 $\{f_n\}$ 如下:
$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x f_n(x)}, \ n \geqslant 1.$$
证明 $\{f_n\}$ 一致收敛到 $[0,1]$ 中的一个连续函数.

2. 设 $f_1(x)$ 为 $[0,a]$ 上的可积函数, 递归地定义函数列 $\{f_n\}$ 如下:
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad n \geqslant 1.$$
证明 $\{f_n\}$ 一致收敛到 0.

3. 设 $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 也一致收敛.

4. 判断下列函数项级数的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, \ x \in (0, +\infty)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\big(\dfrac{1}{3^n x}\big), \ x \in (0, +\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2 + n^2}, \ x \in (-\infty, +\infty)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}, \ x \in [0, +\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+nx)^2}, \ x \in (0, +\infty)$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1 + n^3 x^2}, \ x \in (-\infty, +\infty)$.

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明, 函数项级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \quad x \in [0, +\infty),$$
一致收敛.

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 对 $n \geqslant 1$, 令

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}, \quad x \in [a,b].$$

证明 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

7. 设 $f_n(x)$ 在 I 中一致收敛到 $f(x)$. 如果 $f_n(x)$ 均在 I 中一致连续, 则 $f(x)$ 也在 I 中一致连续.

8. 设 $f_n(x)$ 在 I 中一致收敛到 $f(x)$. 如果 $g(x)$ 是 I 中的有界函数, 则 $f_n(x)g(x)$ 在 I 中一致收敛到 $f(x)g(x)$.

9. 记 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

10. 设 $f_n(x)$ 为 $[a,b]$ 中的连续函数列. 如果 $f_n(x)$ 一致收敛到正函数 $f(x)$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时 $f_n(x)$ 也是正函数, 且 $\dfrac{1}{f_n(x)}$ 一致收敛到 $\dfrac{1}{f(x)}$. 如果把闭区间 $[a,b]$ 换成开区间 (a,b), 结论还成立吗?

11. 设 $f_n(x)$, $g_n(x)$ 和 $h_n(x)$ 是定义在 I 中的函数, 且

$$f_n(x) \leqslant g_n(x) \leqslant h_n(x), \quad x \in I.$$

如果 $f_n(x)$ 和 $h_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$, 则 $g_n(x)$ 也一致收敛到 $f(x)$.

12. 设 $f_n(x)$, $g_n(x)$ 分别在 I 中一致收敛到 $f(x)$, $g(x)$. 如果每一个 $f_n(x), g_n(x)$ 均为有界函数, 则 $f(x), g(x)$ 也是有界函数, 且 $f_n(x)g_n(x)$ 在 I 中一致收敛到 $f(x)g(x)$.

13. 设 $\{P_n(x)\}$ 为一列多项式, 证明, 如果 $P_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中一致收敛到函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 也是多项式. (提示: 考虑多项式的差.)

14. $(*)$ 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中收敛, 其部分和为 $S_n(x)$. 如果存在常数 M, 使得

$$|S_n'(x)| \leqslant M, \quad \forall\, x \in [a,b],\ n \geqslant 1,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛.

§9.2 求和与求导、积分的可交换性

给定收敛的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, 下面我们关心的问题是能否逐项求积分以及逐项求导, 这也依赖于一致收敛性.

定理 9.2.1. (1) 设 $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛于 g. 如果 g_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 g 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛于 f. 如果 f_n 均为 *Riemann* 可积函数, 则 f 也是 *Riemann* 可积函数, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

证明. 只要证明 (1) 即可. 先来证明 g 的可积性. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \geqslant N$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

因为 g_N 是可积函数, 故存在 $[a,b]$ 的分割 π, 使得

$$\sum_{\pi} \omega_i(g_N)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于分割 π 的每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 有

$$\omega_i(g) \leqslant \omega_i(g_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

因此

$$\sum_{\pi}\omega_i(g)\Delta x_i \leqslant \sum_{\pi}\omega_i(g_N)\Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由可积函数的充要条件即知 g 是 $[a,b]$ 上的可积函数.

现在, 当 $n \geqslant N$ 时, 我们有估计

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b g(x)dx\Big| &= \Big|\int_a^b \big(g_n(x) - g(x)\big)dx\Big| \\ &\leqslant \int_a^b |g_n(x) - g(x)|dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

这就证明了定理的结论. □

注. (i) 这个定理说的是极限或求和与积分运算次序的可交换性. 一般地, 定理中的一致收敛的条件是不能去掉的. 但对于一致有界的函数列, 有如下控制收敛定理: 设 $g_n(x)$, $g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的可积函数, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. 如果存在常数 M, 使得

$$|g_n(x)| \leqslant M, \quad \forall\, x \in [a,b],\ n \geqslant 1,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) 从定理的证明还可以看出, (2) 中函数项级数还满足下面的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_a^x f(t)dt.$$

定理 9.2.2. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 中连续可微, 且

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$;

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 其和函数可导, 且

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x).$$

证明. 由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt.$$

由条件 (2) 和上面的注记 (ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_a^x g(t)dt.$$

再由条件 (1) 即知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \rightrightarrows\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 其和函数可导, 且导数为 $g(x)$. □

注. 条件 (1) 中点 a 可换成区间中其它任何一点, 并且连续可微的条件可以适当减弱, 参见下面的结果.

定理 9.2.3. (*) 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 中一列可微函数, $c \in [a,b]$. 如果 $\{f_n(c)\}$ 收敛, $f_n'(x)$ 一致收敛到 $g(x)$, 则 $f_n(x)$ 一致收敛于可微函数 $f(x)$, 且 $f'(x) = g$.

证明. 首先, 由微分中值定理, 我们有

$$
\begin{aligned}
|[f_n(x)-f_n(c)]-[f_m(x)-f_m(c)]| &= |[f_n(x)-f_m(x)]-[f_n(c)-f_m(c)]| \\
&= |[f_n'(\xi)-f_m'(\xi)]||x-c| \rightrightarrows 0,
\end{aligned}
$$

这说明 $\{f_n(x)-f_n(c)\}$ 一致收敛, 从而 $f_n(x)$ 一致收敛到一个函数 $f(x)$.

其次, 任取 $x_0 \in [a,b]$, 令

$$
g_n(x)=\begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0, \\ f_n'(x_0), & x=x_0. \end{cases}
$$

则 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 中的连续函数, 且类似于刚才的论证, 由微分中值定理, 有

$$
|g_n(x)-g_m(x)|=|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)| \rightrightarrows 0,
$$

这说明 $g_n(x)$ 一致收敛到连续函数

$$
\tilde{g}(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0, \\ g(x_0), & x=x_0. \end{cases}
$$

特别地, $f(x)$ 在 x_0 处可导, 导数为 $g(x_0)$. □

下面我们来讨论一些应用. 反复利用等式

$$
\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\Big]
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\Big] \\
&= \frac{1}{4^2}\Big[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{2\pi+x}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi+x}{4}}\Big] \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi+x}{2^n}}.
\end{aligned}
$$

对 $2^{n-1}\leqslant k\leqslant 2^n-1$ 再利用

$$
\sin^2\frac{k\pi+x}{2^n}=\sin^2\Big(\frac{k\pi+x-2^n\pi}{2^n}+\pi\Big)=\sin^2\frac{(k-2^n)\pi+x}{2^n}
$$

可以将前式改写为

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{x+k\pi}{2^n}} \\
&= E_n+\sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{(x+k\pi)^2},
\end{aligned}
$$

其中

$$E_n = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \Big[\frac{1}{\sin^2 \frac{x+k\pi}{2^n}} - \frac{1}{(\frac{x+k\pi}{2^n})^2} \Big].$$

利用不等式

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1, \quad \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

就得到如下估计

$$0 < E_n < \frac{1}{2^{2n}} 2^n = \frac{1}{2^n}, \quad \forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

令 $n \to \infty$ 就得到下面的等式

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+k\pi)^2}, \quad \forall\, x \neq k\pi. \tag{9.2}$$

上式在不包含 $\{k\pi\}$ 的任何闭区间上都是一致收敛的, 它也可改写为

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{(x+n\pi)^2} + \frac{1}{(x-n\pi)^2} \Big], \quad x \neq k\pi. \tag{9.3}$$

特别地, 有

$$\frac{1}{3} = \lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \Big) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2},$$

因此有

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

当 $x \in (-\pi, \pi)$ 时, 对 (9.3) 两边积分, 利用

$$\int_0^x \Big(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2} \Big) dt = \Big(\frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t} \Big)\Big|_0^x = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

得

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi} \big), \quad \forall\, x \in (-\pi, \pi). \tag{9.4}$$

如果再对上式两边积分就可以得到

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big[1 - \big(\frac{x}{n\pi} \big)^2 \Big], \quad \forall\, x \in [-\pi, \pi]. \tag{9.5}$$

这个等式就好像将函数 $\sin x$ 作因式分解一样. 特别地, 取 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 就得到

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big[1 - \frac{1}{4n^2} \Big],$$

这也就是 Wallis 公式的乘积表示.

从等式 (9.4) 出发, 利用

$$\tan x = \cot\big(\frac{\pi}{2} - x\big), \quad \frac{1}{\sin x} = \cot\frac{x}{2} - \cot x$$

还可以得到展开式

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{(2n-1)\frac{\pi}{2} + x}\Big], \tag{9.6}$$

以及

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\big(\frac{1}{x+n\pi} + \frac{1}{x-n\pi}\big). \tag{9.7}$$

作为最后这个展开式的应用, 我们再一次来计算广义积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ 如下:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi+\frac{1}{2}\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\frac{\sin t}{n\pi+t}dt + \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\frac{\sin t}{(n+1)\pi - t}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\big(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi}\big)\sin t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\big(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi}\big)\sin t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\big)\sin t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}dt = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

在计算过程中, 我们用到了一致收敛级数的求和与积分运算次序的可交换性. □

习题 9.2

1. 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续可微.

2. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 绝对收敛, 证明 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续可微, 且

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n\sin nx, \quad x\in(-\infty, +\infty).$$

3. 证明函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在 $(1, +\infty)$ 中任意次可微.

4. 如果连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 中一致收敛于 $f(x)$, 则对区间 $[a, b]$ 中的任意收敛点列 $\{x_n\}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

5. 计算下列积分

$$(1)\ \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} dx, \qquad (2)\ \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} dx.$$

6. 研究函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|}{n^2 + x^2}$ 的可微性质.

7. 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 中可微, 且

    (1) 存在 $c \in [a, b]$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ 收敛;

    (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$;

    则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 中一致收敛, 且

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x).$$

8. 设 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 中一致收敛到 $f(x)$. 如果每个 $f_n(x)$ 都有原函数, 则 $f(x)$ 也有原函数.

9. (∗) 通过在展开式 (9.2) 中取 $x = \dfrac{\pi}{2}$, 求 $\zeta(2)$ 的值.

10. (∗) 说明 (9.5) 式对任意 x 均成立, 并证明下面的乘积公式

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \Big[1 - \frac{x^2}{(\frac{2n-1}{2}\pi)^2}\Big].$$

11. (∗) 证明, 如果 na_n 为单调收敛于 0 的数列, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中一致收敛.

§9.3 幂级数

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为**幂级数**, 在第五章 Taylor 展开那一节中我们已遇到过这样的级数. 为了简单起见, 我们讨论 $x_0 = 0$ 的情形, 一般情形作变量代换 $t = x - x_0$ 即可.

§9.3.1 收敛半径及基本性质

引理 9.3.1 (Abel)**.** *如果幂级数* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *在* $x = x_1 (x_1 \neq 0)$ *处收敛, 则它在区间* $|x| < |x_1|$ *中绝对收敛; 因此, 幂级数在* $x = x_2$ *处发散意味着在* $|x| > |x_2|$ *中均发散.*

证明. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得

$$|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1,$$

这说明

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n| \cdot \Big|\frac{x}{x_1}\Big|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \Big|\frac{x}{x_1}\Big|^n,$$

因此当 $|x| < |x_1|$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. □

注. 从证明可以看出, 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则对任何闭区间 $I \subset (-|x_1|, |x_1|)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 I 中都是一致收敛的.

定理 9.3.2 (Cauchy-Hadamard)**.** *对幂级数* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, 记*

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

(1) $\rho = 0$ *时, 级数在* $(-\infty, \infty)$ *中绝对收敛;*

(2) $\rho = +\infty$ *时, 级数仅在* $x = 0$ *处收敛;*

(3) $0 < \rho < +\infty$ *时, 级数在* $\big(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\big)$ *中绝对收敛, 在* $\big[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\big]$ *之外发散. 此时, 称* $\frac{1}{\rho}$ *为收敛半径.*

证明. 因为

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho|x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法即可得定理结论的证明. 以 (3) 的后半部分为例 (反证法): 设 $x_1 \notin \big[-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\big]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得

$$|a_n x_1^n| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{M|x_1|^{-n}}=|x_1|^{-1}<\rho.$$

这就导出了矛盾! □

注. (1) 在 $x=\pm\rho^{-1}$ 处级数的收敛性必须视情况具体讨论.

(2) $0<\rho<+\infty$ 时, 对任意闭区间 $I\subset(-\rho^{-1},\rho^{-1})$, 幂级数均在 I 中一致收敛.

例 9.3.1. 几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

此级数的系数 $a_n=1$, 故 $\rho=1$. 在 $x=\pm1$ 处级数显然发散. □

例 9.3.2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

此级数的系数 $a_n=\frac{1}{n}$, $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$. 级数在 $x=1$ 处发散; 在 $x=-1$ 处收敛 (交错级数). □

例 9.3.3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 具有相同的收敛半径.

事实上, 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho,$$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\rho,$$

因此两个级数的收敛半径相同. □

定理 9.3.3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径为 R, 则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 中任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}.$$

证明. 以 $k=1$ 为例. 首先, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R, 故它在闭区间 $I\subset(-R,R)$ 中一致收敛. 由定理 9.2.2, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 I 中可微, 且

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

$S(x)$ 的高阶可微性的证明是完全类似的. □

特别地, $S^{(n)}(0)=n!a_n$, 这说明和函数 $S(x)$ 的 Taylor 展开就是该幂级数本身.

例 9.3.4. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 之和.

解. 在 $(-1,1)$ 中, 有

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

由 Newton-Leibniz 公式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x),\quad \forall\ x\in(-1,1).$$

注意到上式在 $x=-1$ 处也成立, 这不是偶然的现象, 在第八章第四节中讨论数项级数的乘积时已经讨论过一个特殊情形, 现在我们再看一下一般的情形, 其证明其实本质上是一样的.

定理 9.3.4 (Abel 连续性定理)**.** *设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R $(0<R<+\infty)$. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛, 则*

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n;$$

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to -R^+}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n.$$

证明. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛, 则考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\cdot\big(\frac{x}{R}\big)^n,$$

在 $[0,R]$ 上, $\big|(\dfrac{x}{R})^n\big|\leqslant 1$, 且 $\big(\dfrac{x}{R}\big)^n$ 关于 n 单调. 由 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,R]$ 中一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[0,R]$ 中连续, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S(R)=\lim_{x\to R^-}S(x)=\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

关于 $-R$ 的证明完全类似 (或考虑 $\tilde{a}_n=(-1)^n\cdot a_n$). □

例 9.3.5. *求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 之和.*

解. 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, 其收敛半径为 1, 且在 $(-1,1)$ 内

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)'=x\big(\frac{1}{1-x}\big)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{x}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2.$$

例 9.3.6. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ 之和.

解. 考虑幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$, 其收敛半径为 1, 且 $x=1$ 时级数收敛, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x).$$

在 $(-1,1)$ 中, 有

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\big(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\big)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{3n}=\frac{1}{1+x^3}.$$

故由微积分基本公式,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}\big(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\big).$$

定理 9.3.5 (逐项积分)**.** 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径 $R\neq0$, 则有

$$\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\Big)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad \forall\ x\in(-R,R).$$

证明. 不妨设 $x>0$, 则根据前面的讨论, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t\in[0,x]$ 中一致收敛, 因此可以逐项积分. □

注. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛, 则上面的等式对 $x=R$ 也成立. 对 $-R$ 有类似结果.

下面关于幂级数的求和与求极限运算次序的可交换性的结果是数项级数和函数项级数相应结果的直接应用, 我们省略证明.

定理 9.3.6. 设 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{mn}=a_n$, $|a_{mn}|\leqslant A_n$. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 中收敛, 则

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad x\in(-R,R).$$

定理 9.3.7. 设 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|a_{ij}|=s_j$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}s_jx^j$ 在 $(-R,R)$ 中收敛, 则

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}\big)x^j,\quad x\in(-R,R).$$

作为应用, 我们来推导 $\tan x$ 的幂级数展开. 由前节 (9.6) 式, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\tan x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2 - x^2} \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2} \Big(\frac{x}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\Big)^{2m} \\ &= 2x \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2} \Big(\frac{x}{(2n-1)\frac{\pi}{2}}\Big)^{2m}.\end{aligned}$$

利用等式

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2k}} + 2^{-2k}\zeta(2k)$$

可以将前式写为

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} 2(2^{2k}-1)x^{2k-1}, \quad \forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \tag{9.8}$$

§9.3.2 Taylor 展开与幂级数

下面我们回顾一下 Taylor 展开. 如果 f 在 x_0 处任意次可导, 则 f 有 Taylor 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

然而, 这个幂级数在 x_0 以外的点上很可能不收敛, 即使收敛, 其极限也未必就是 $f(x)$. 不过我们有下面的两个结果.

定理 9.3.8 (Bernstein)**.** (∗) 设 f 在 $[a,b]$ 中任意阶可导, 且各阶导数非负. 则当 $x, x_0 \in (a,b)$, 且 $|x-x_0| < b - x_0$ 时

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

证明. 记 $M = f(b) - f(a)$, 由 $f', f'' \geqslant 0$ 知 f, f' 为单调递增函数. 任给 $x \in (a,b)$, 由微分中值定理, 有

$$M = f(b) - f(a) \geqslant f(b) - f(x) = (b-x)f'(\xi) \geqslant (b-x)f'(x).$$

同理,

$$M \geqslant f(b) - f(x) = f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2 \geqslant \frac{1}{2}f''(x)(b-x)^2.$$

依此类推, 我们得到如下估计

$$0 \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant \frac{n!M}{(b-x)^n}, \quad \forall\, x \in (a,b).$$

下面分两种情况来估计 f 在 x_0 处 Taylor 展开的余项 $R_n(x)$.

(1) $x > x_0$. 此时有

$$\begin{aligned}
0 \leqslant R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} (n+1)M \frac{(x-t)^n}{(b-t)^{n+1}} dt \\
&\leqslant \frac{(n+1)M}{b-x} \int_{x_0}^{x} \Big(\frac{x-t}{b-t}\Big)^n dt \\
&\leqslant \frac{(n+1)M}{b-x} \Big(\frac{x-x_0}{b-x_0}\Big)^n (x-x_0) \to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

(2) $x < x_0$. 此时, 如果 $x_0 - x < b - x_0$, 则

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \Big| \\
&\leqslant \int_{x}^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(t-x)^n dt \\
&\leqslant \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0) \int_{x}^{x_0} (t-x)^n dt \\
&\leqslant \frac{1}{n!} \frac{(n+1)!M}{(b-x_0)^{n+1}} \frac{(x_0-x)^{n+1}}{n+1} \\
&\leqslant M\Big(\frac{x_0-x}{b-x_0}\Big)^{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \frac{1}{(n+1)!}(x_0-x)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)!}(x_0-x)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \\
&\leqslant M\Big(\frac{x_0-x}{b-x_0}\Big)^{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

总之, 余项的确是趋于零的. □

作为例子, 函数 $f(x) = e^x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 中的各阶导数均大于零, 按照 Bernstein 定理, 我们立即就得到等式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall\, x \in (-\infty,+\infty).$$

我们也可以在这儿再看看前节 (9.3) 式. 当 $x \in (-\pi,\pi)$ 时, 根据逐项求导易见, 函数 $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ 的各阶导数非负, 因此有 (注意偶函数的展开无奇次幂项)

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m}}{(2m)!} x^{2m}, \quad \forall\, x \in (-\pi,\pi),$$

其中

$$a_{2m} = \Big(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\Big)^{(2m)}(0) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2m+1)!}{(n\pi)^{2m+2}} = 2(2m+1)!\frac{\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}},$$

因此有

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}}(4m+2)x^{2m}, \quad \forall\ x \in (-\pi, \pi). \tag{9.9}$$

定理 9.3.9. 设 $R > 0$, f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 中无限次可导. 如果存在 $M > 0$ 使得

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M^n, \quad \forall\ x \in (x_0 - R,\ x_0 + R), \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \forall\ x \in (x_0 - R,\ x_0 + R).$$

证明. 当 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 时, 由 Taylor 公式的 Lagrange 余项表示, 我们有

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\Big| &= |R_n(x)| \\ &= \Big|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\Big| \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}R^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

这说明 f 在 x_0 处的 Taylor 展开的确收敛到 f 自身. □

例 9.3.7. 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$,

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \ \text{(广义组合数)}$$

由于

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big|\frac{\alpha - n}{n+1}\Big| \to 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

故此幂级数的收敛半径为 1.

记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ \ x\in(-1,1)$. 在 $(-1,1)$ 中逐项求导, 有

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x)&=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}nx^{n-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^n\\&=\binom{\alpha}{1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1}+n\binom{\alpha}{n}\right]x^n\\&=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha f(x),\end{aligned}$$

这说明

$$[(1+x)^{-\alpha}f(x)]'=-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x)+(1+x)^{-\alpha}f'(x)=0,$$

从而

$$(1+x)^{-\alpha}f(x)\equiv c.$$

由 $f(0)=1$ 知 $f(x)=(1+x)^{\alpha},\ \ x\in(-1,1)$. 即

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad\forall\ x\in(-1,1).$$

特别地, 取 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, 并以 $-x^2$ 代替 x 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad\forall\ x\in(-1,1).$$

对此幂级数逐项积分, 得 (约定 $(-1)!!=1,\ 0!!=1$)

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad\forall\ x\in(-1,1).$$

由于在 $x=\pm1$ 处右式收敛 (§8.2 节的例子), 故上式在 $[-1,1]$ 上均成立, 并且在 $[-1,1]$ 中一致收敛. 代入 $x=\sin t$, 得

$$t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}t}{2n+1},\quad\forall\ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],$$

并且上式是一致收敛的 (为什么?). 再次逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

由此容易得到下面的求和等式

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

例 9.3.8. 求积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

解. 根据 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开可得

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}, \quad x \in (-1, 1].$$

上式在 $[0,1]$ 上一致收敛, 因此可逐项积分:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

§9.3.3 幂级数的乘法和除法运算

本小节内容可以作为选读材料.

定理 9.3.10. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 中均收敛, 则

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big) x^n, \quad \forall\, x \in (-R, R).$$

证明. 只要证明对任意闭区间 $I \subset (-R, R)$ 等式成立即可. 在闭区间 I 上, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 都是绝对一致收敛的, 因此, 根据数项级数乘积的 Cauchy 定理, 有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} (a_i x^i)(b_j x^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big) x^n.$$

这就证明了幂级数的乘法公式. □

例 9.3.9. 函数 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 的幂级数展开.

我们知道, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \tag{9.10}$$

由幂级数的乘积公式, 得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} 1 \cdot 1\Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

这个等式也可以通过对 (9.10) 逐项求导得到. □

例 9.3.10. 设 $r\in(-1,1)$, $x\in\mathbb{R}$, 求下面级数的和:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx.$$

解. 我们计算级数的乘积:

$$\begin{aligned}
&\big(1-2r\cos x+r^2\big)\big(1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx\big)\\
&=1-2r\cos x+r^2+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx-2r\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos x\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}\cos nx\\
&=1-2r\cos x+r^2+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx-r\sum_{n=1}^{\infty}r^n\big(\cos(n-1)x+\cos(n+1)x\big)\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}\cos nx\\
&=1-r\cos x.
\end{aligned}$$

由此可得等式

$$\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx,\quad r\in(-1,1).\tag{9.11}$$

将上式中右端的 1 移到左端, 两边除以 r, 再关于 r 逐项积分, 得

$$\ln(1-2r\cos x+r^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos nx,\quad r\in(-1,1).\tag{9.12}$$

如果上式关于 x 积分, 则得如下 Poisson 积分

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx=0,\quad |r|<1.\tag{9.13}$$

下面我们考虑幂级数的除法运算, 它可以看成是乘法运算的逆运算.

定理 9.3.11. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ $(R>0)$ 中收敛, $a_0\neq 0$. 则存在 $r>0$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $(-r,r)$ 中收敛, 且

$$\big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\big)\big(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\big)\equiv 1,\quad \forall\ x\in(-r,r),$$

或写为

$$\frac{1}{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots}=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots.$$

证明. 不妨设 $a_0=1$. 下面, 我们递归地定义 b_n 如下: 令 $b_0=1$, 当 $b_0,\cdots,b_{n-1}$ 已定义好后, 令

$$b_n=-\sum_{i=0}^{n-1}a_{n-i}b_i,\quad n\geqslant 1.$$

我们来说明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 具有正的收敛半径. 事实上, 因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 中收敛, 故存在 $M>0$, 使得

$$\Big|a_n\big(\frac{R}{2}\big)^n\Big|\leqslant M,\quad \forall\ n\geqslant 0.$$

因此有

$$\Big|b_n\big(\frac{R}{2}\big)^n\Big|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\Big|a_{n-i}\big(\frac{R}{2}\big)^{n-i}\Big|\Big|b_i\big(\frac{R}{2}\big)^i\Big|\leqslant M\sum_{i=0}^{n-1}\Big|b_i\big(\frac{R}{2}\big)^i\Big|,$$

由此利用归纳法不难得到下面的估计

$$\Big|b_n\big(\frac{R}{2}\big)^n\Big|\leqslant(1+M)^n,\quad \forall\ n\geqslant 0.$$

这说明, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径至少为 $r=\dfrac{R}{2(1+M)}$. 根据 $\{b_n\}$ 的构造, 显然有 (我们假设了 $a_0=1$)

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n}a_ib_j\Big)x^n=1.$$

这就证明了定理. □

例 9.3.11. *Bernoulli* 数.

考虑函数 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 的幂级数展开:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n, \tag{9.14}$$

其系数 B_n 称为第 n 个 Bernoulli 数. 我们有

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x-1}&=\Big(\frac{e^x-1}{x}\Big)^{-1}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\Big)^{-1}\\&=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\frac{x^6}{30240}-\frac{x^8}{1209600}+\cdots\end{aligned}$$

注意到上式中当 $n\geqslant 1$ 时 $B_{2n+1}=0$, 这是因为

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2},$$

即 $\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}$ 为偶函数的缘故.

根据幂级数的除法公式, 我们容易得到 B_n 的如下递推公式:

$$B_0=1,\ B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n+1}^k B_k.$$

例如, 开头的几个 Bernoulli 数为

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=B_5=B_7=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30}.$$

Bernoulli 数在许多学科 (比如数论) 中都有重要的应用. 我们下面把它们和 Riemann-Zeta 函数的值联系起来. 首先, 我们将 (9.14) 改写为

$$x\coth x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \tag{9.15}$$

其次, 从第八章第四节 (8.3) 式出发, 我们有

$$\ln\big(\frac{\sinh x}{x}\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\big(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+1\big),$$

上式两边求导, 得

$$\begin{aligned}x\coth x&=1+2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2\pi^2}\\&=1+2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(n\pi)^2}\big(\frac{x}{n\pi}\big)^{2m}\\&=1+2x^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(n\pi)^{2m+2}}\\&=1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(-1)^m\zeta(2m+2)}{\pi^{2m+2}}x^{2m+2}.\end{aligned}$$

将上式和 (9.15) 对比, 我们就得到了重要的等式

$$\zeta(2n)=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}B_{2n}\pi^{2n}}{2(2n)!},\quad \forall\ n\geqslant 1. \tag{9.16}$$

例如, 从上式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\zeta(4)=-\frac{2^4B_4\pi^4}{2\cdot 4!}=\frac{\pi^4}{90},$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\zeta(6)=\frac{2^6B_6\pi^6}{2\cdot 6!}=\frac{\pi^6}{945},$$

等等; 并且从 (9.16) 我们还可以知道 (9.14) 中幂级数的收敛半径为 2π.

例 9.3.12. *Euler* 数.

考虑函数 $\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$ 的展开式

$$\frac{2e^x}{e^{2x}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n,$$

其系数 E_n 称为 *Euler* 数. 因为 $\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}=\dfrac{1}{\cosh x}$ 是偶函数, 故上式也可写为

$$\frac{1}{\cosh x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}. \tag{9.17}$$

因为 $\cosh x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, 由幂级数的除法公式可得如下递推公式

$$E_0=1,\ E_{2n-1}=0,\ E_{2n}=-\sum_{l=0}^{n-1}C_{2n}^{2l}E_{2l},\quad n\geqslant 1.$$

§9.3.4 母函数方法

本小节内容可以作为选读材料. 设 $\{a_n\}$ 为一列实数, 我们将形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\quad (有时是\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n)$$

称为 $\{a_n\}$ 的生成函数或母函数. 例如, 广义组合数 $\{\binom{\alpha}{n}\}$ 的母函数为 $(1+x)^{\alpha}$, Bernoulli 数的母函数为 $\dfrac{x}{e^x-1}$.

通过对母函数做幂级数的四则运算和求导以及积分等, 我们可以了解母函数的性质, 进而了解数列 $\{a_n\}$ 的性质, 这种办法称为母函数方法. 我们以下举例说明.

例 9.3.13. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 证明组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n},\quad \forall\ n\geqslant 1.$$

证明. 考虑等式

$$(1+x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta}=(1+x)^{\alpha+\beta},\quad |x|<1.$$

用幂级数表示, 上式成为

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\beta}{n}x^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}x^n,$$

利用幂级数的乘法公式, 比较等式两边 x^n 项的系数就得到了恒等式的证明. □

例 9.3.14. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 证明组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k}\binom{\alpha}{2n-k} = (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

证明. 考虑等式

$$(1+x)^\alpha \cdot (1-x)^\alpha = (1-x^2)^\alpha, \quad |x| < 1.$$

用幂级数表示, 上式成为

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}x^{2n},$$

利用幂级数的乘法公式, 比较等式两边 x^{2n} 项的系数就得到了恒等式的证明. □

例 9.3.15. *Fibonacci 数列.*

设数列 $\{a_n\}$ 由以下递推关系决定:

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 2.$$

a_n 称为第 n 个 Fibonacci 数. 我们利用母函数来求 a_n 的通项公式. 记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

则

$$(1-x-x^2)f(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n = 1,$$

因此

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

记 x_1, x_2 为方程 $1-x-x^2=0$ 的根:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

则

$$f(x) = \frac{1}{x_2-x_1}\Big(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x_2-x_1}\Big(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\Big)x^n,$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{x_2-x_1}\Big(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\Big) = \frac{1}{(x_1x_2)^{n+1}}\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_2-x_1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big], \quad \forall\ n \geqslant 0. \end{aligned}$$

例 9.3.16. *Bernoulli 多项式.*

设 t 为实数, 考虑函数 $\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}$ 关于 x 的幂级数展开

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n,$$

其系数 $B_n(t)$ 称为第 n 个 Bernoulli 多项式. 为了看出 $B_n(t)$ 的确是关于 t 的多项式, 我们要利用幂级数的乘积公式. 从等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n=\frac{x}{e^x-1}e^{tx}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n\Big)$$

中比较两端 x^n 的系数, 得

$$B_n(t)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_{n-k}t^k,\quad n\geqslant 0. \tag{9.18}$$

因此 $B_n(t)$ 是关于 t 的 n 次多项式, 且 $B_n(0)=B_n$. 另一方面, 由定义

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t)}{n!}x^n,\quad \frac{xe^{(t+1)x}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)}{n!}x^n$$

两式相减, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(t+1)-B_n(t)}{n!}x^n=xe^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^{n+1},$$

比较等式两边 x^{k+1} 的系数, 得

$$B_{k+1}(t+1)-B_{k+1}(t)=(k+1)t^k,\quad \forall\ k\geqslant 1. \tag{9.19}$$

在上式中分别取 $t=1,2,\cdots,n$, 再把这些等式相加, 得

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}(1)}{k+1}.$$

在 (9.19) 中取 $t=0$ 知 $B_{k+1}(1)=B_{k+1}(0)=B_{k+1}$, 再利用 (9.18), 上式可改写为

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k+1}C_{k+1}^lB_{k+1-l}(n+1)^l. \tag{9.20}$$

特别地, 当 $k=2$ 时可得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}(n+1)-\frac{3}{2}(n+1)^2+(n+1)^3\Big]=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

当 $k=3$ 时可得

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}[(n+1)^2-2(n+1)^3+(n+1)^4]=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

读者可以将这里的方法与前一章第三节的方法做对比.

习题 9.3

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R > 0$ 处收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 中一致收敛.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n 2^n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

3. 求下列幂级数的收敛半径, 并判断它们在收敛区间端点的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n;$$
$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; \qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) x^n;$$
$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{R}; \qquad (6)\ \sum_{n=1}^{\infty} (\ln \frac{n^2+\alpha^2}{n^2}) x^n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} x^n$$

的收敛半径, 其中 α 为常数.

5. 利用幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-1, 1)$ 证明

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

6. 利用幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$ 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ 的和.

7. 求下列级数之和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n, \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3) x^n.$$

8. ($*$) 推导下列等式 ($x \in (-\pi, \pi)$):

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k-1}, \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2 - 2^{2-2k}) x^{2k-1}.$$

9. 证明等式

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

10. 证明

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

11. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R>0$, 则

(1) 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_nR^{n+1}}{n+1}$ 收敛时, 有

$$\int_0^R S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nR^{n+1}}{n+1};$$

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nR^{n-1}$ 收敛时, 有

$$S'(R)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nR^{n-1}.$$

12. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在开区间 $(-R,R)$ 中一致收敛, 则它在闭区间 $[-R,R]$ 中也是一致收敛的.

13. 设 $a_n>0$, 且幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R. 证明

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^n.$$

注意上式中的后者可能是发散的, 此时要证明的是左式极限为 $+\infty$.

14. $(*)$ 证明下面的等式

$$x\cot x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\pi,\pi).$$

15. $(*)$ 证明下面的等式

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$$

§9.4 函数项级数的进一步讨论

本节内容可以作为选读材料.

§9.4.1 近似计算回顾

(1) 几个常数的近似计算

例 9.4.1. π 的近似计算.

我们可以用 $\arctan x$ 的如下幂级数展开

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

以及交错级数的误差估计来计算 π. 利用等式

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v},$$

当 $u = \arctan(1/5)$ 时, 有

$$\tan(2u) = \frac{2/5}{1-(1/5)^2} = 5/12, \quad \tan(4u) = \frac{10/12}{1-(5/12)^2} = 120/119.$$

因此

$$\tan\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{120/119 - 1}{1 + 120/119} = 1/239,$$

这就得到下面等式

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}, \tag{9.21}$$

或改写为如下的 Machin 公式

$$\pi = 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}, \tag{9.22}$$

这个公式已经可用于实际的计算了 (1706 年, Machin 用这个公式将 π 计算到了小数点后 100 位). 类似地, 我们可以得到等式

$$2\arctan\frac{1}{10} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{515},$$

从而有

$$\begin{aligned}
\pi &= 32\arctan\frac{1}{10} - 4\arctan\frac{1}{239} - 16\arctan\frac{1}{515} \\
&= 32\Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{3}\frac{1}{10^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{10^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{10^7} + \frac{1}{9}\frac{1}{10^9} - \frac{1}{11}\frac{1}{10^{11}}\Big) + \delta_1 \\
&\quad - 4\Big(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\frac{1}{239^3}\Big) - \delta_2 - 16\Big(\frac{1}{515} - \frac{1}{3}\frac{1}{515^3}\Big) - \delta_3,
\end{aligned}$$

其中

$$\frac{32}{13}\times 10^{-13} - \frac{32}{15}\times 10^{-15} < \delta_1 < \frac{32}{13}\times 10^{-13},$$

因此

$$0.24\times 10^{-12} < \delta_1 < 0.25\times 10^{-12},$$

同理,

$$1.02\times10^{-12}<\delta_2<1.03\times10^{-12},\quad 0.08\times10^{-12}<\delta_3<0.09\times10^{-12},$$

因此

$$-0.88\times10^{-12}<\delta_1-\delta_2-\delta_3<-0.85\times10^{-12}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\pi\approx&32\Big(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}\frac{1}{10^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{10^5}-\frac{1}{7}\frac{1}{10^7}+\frac{1}{9}\frac{1}{10^9}-\frac{1}{11}\frac{1}{10^{11}}\Big)\\&-4\Big(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\frac{1}{239^3}\Big)-16\Big(\frac{1}{515}-\frac{1}{3}\frac{1}{515^3}\Big)\\=&3.14159265359066...\end{aligned}$$

因此得到

$$3.14159265358978<\pi<3.14159265358982,$$

上述 π 的值精确到了小数点后第 12 位.

如何更快地精确计算 π 是一个很有意思的数学问题. 1914 年, 印度天才数学家 Ramanujan 发表了一系列公式, 其中一个为

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{(k!)^4 4^{4k}}\frac{(1103+26390k)}{99^{4k}},\tag{9.23}$$

这个公式的每一项可提供 π 的大约 8 位有效数字. 1988 年, Chudnovsky 兄弟得到了公式

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(6k)!}{(3k!)(k!)^3}\frac{(13591409+545140134k)}{640320^{3k+3/2}},\tag{9.24}$$

这个公式的每一项可提供 π 的大约 15 位有效数字. 很快, 收敛得更快的类似的公式也被发现了. 另一方面, 1996 年, Baily, Borwein 和 Plouffe 发现了下面的公式

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\Big)\frac{1}{16^k},\tag{9.25}$$

他们利用这个公式证明了, 在 2 进制下可以直接计算 π 的第 n 位小数而无需知道其前 $n-1$ 位小数的值. 现在, 人们利用已经发现的这些算法在计算机上进行 π 的快速高精度计算, 这也成为了检验计算机运行速度的初步手段.

例 9.4.2. $\ln 2$ 的计算.

与 π 的计算类似, 我们利用幂级数

$$\operatorname{arctanh}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad |x|<1$$

来计算 $\ln 2$. 如果在上式中取 $x=1/3$, 则得到公式

$$\ln 2=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)9^{k}}, \tag{9.26}$$

这个公式已经可以用于实际的计算. 与 Machin 公式类似, 利用等式

$$\Big(\frac{27}{25}\Big)^{9}\Big(\frac{4800}{4802}\Big)\Big(\frac{8750}{8748}\Big)^{4}=2$$

可得

$$\begin{aligned}\ln 2&=18\mathrm{arctanh}\frac{1}{26}-2\mathrm{arctanh}\frac{1}{4801}+8\mathrm{arctanh}\frac{1}{8749}\\&=18\Big(\frac{1}{26}+\frac{1}{3\cdot 26^{3}}+\frac{1}{5\cdot 26^{5}}+\frac{1}{7\cdot 26^{7}}+\frac{1}{9\cdot 26^{9}}\Big)\\&\quad-2\Big(\frac{1}{4801}+\frac{1}{3\cdot 4801^{3}}\Big)+8\Big(\frac{1}{8749}+\frac{1}{3\cdot 8749^{3}}\Big)+\delta,\end{aligned}$$

其中

$$\delta=18\Big(\frac{1}{11\cdot 26^{11}}+\frac{1}{13\cdot 26^{13}}+\cdots\Big)-2\Big(\frac{1}{3\cdot 4801^{5}}+\cdots\Big)+8\Big(\frac{1}{5\cdot 8749^{5}}+\cdots\Big),$$

易见

$$\frac{18}{11\cdot 26^{11}}<\delta<\frac{18}{11\cdot 26^{11}}\Big(1+\frac{1}{26^{2}}+\frac{1}{26^{4}}+\cdots\Big)=\frac{18}{11\cdot 25\cdot 27\cdot 26^{9}},$$

从而有

$$0.44\times 10^{-15}<\delta<0.45\times 10^{-15}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\ln 2&\approx 18\Big(\frac{1}{26}+\frac{1}{3\cdot 26^{3}}+\frac{1}{5\cdot 26^{5}}+\frac{1}{7\cdot 26^{7}}+\frac{1}{9\cdot 26^{9}}\Big)\\&\quad-2\Big(\frac{1}{4801}+\frac{1}{3\cdot 4801^{3}}\Big)+8\Big(\frac{1}{8749}+\frac{1}{3\cdot 8749^{3}}\Big)\\&=0.6931471805599485...\end{aligned}$$

最后得到

$$0.6931471805599529<\ln 2<0.6931471805599531,$$

上述 $\ln 2$ 的值精确到了小数点后第 14 位.

例 9.4.3. $\sqrt{2}$ 的计算.

我们利用幂级数展开

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n},\quad |x|<1$$

来计算 $\sqrt{2}$. 从 $p_0=q_0=1$ 出发, 递归地定义正整数 p_k,q_k 如下:

$$p_0=q_0=1,\quad p_k=3p_{k-1}+4q_{k-1},\quad q_k=2p_{k-1}+3q_{k-1},\quad k\geqslant 1.$$

容易验证, p_k,q_k 满足关系

$$2q_k^2-p_k^2=1,\quad \forall\ k\geqslant 0.$$

因此有

$$\sqrt{2}=\frac{p_k}{q_k}\Big(\frac{2q_k^2}{p_k^2}\Big)^{\frac{1}{2}}=\frac{p_k}{q_k}\Big(1-\frac{1}{p_k^2+1}\Big)^{-\frac{1}{2}},$$

例如, 取 $k=1$, 此时 $p_1=7$, $q_1=5$, 因此有

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\big(1-\frac{1}{50}\big)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\big(1+\frac{1}{2}\frac{1}{50}+\frac{3}{8}\frac{1}{50^3}+\frac{35}{128}\frac{1}{50^4}+\cdots\big),$$

这个公式已经可以用于实际的计算. 如果取 $k=3$, 则 $p_3=239$, $q_k=169$, 从而

$$\sqrt{2}=\frac{239}{169}\big(1+\frac{1}{2}\frac{1}{57122}+\frac{3}{8}\frac{1}{57122^2}+\frac{5}{16}\frac{1}{57122^3}\big)+\delta,$$

其中

$$\delta=\frac{239}{169}\big(\frac{35}{128}\frac{1}{57122^4}+\frac{63}{256}\frac{1}{57122^5}+\cdots\big),$$

易见

$$\begin{aligned}\frac{239}{169}\frac{35}{128}\frac{1}{57122^4}\ <\ \delta&<\frac{239}{169}\frac{35}{128}\frac{1}{57122^4}\big(1+\frac{1}{57122}+\frac{1}{57122^2}+\frac{1}{57122^3}+\cdots\big)\\&=\frac{239}{169}\frac{35}{128}\frac{1}{57121\cdot 57122^3},\end{aligned}$$

因此有

$$0.36\times 10^{-19}<\delta<0.37\times 10^{-19}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}&\approx\frac{239}{169}\big(1+\frac{1}{2}\frac{1}{57122}+\frac{3}{8}\frac{1}{57122^2}+\frac{5}{16}\frac{1}{57122^3}\big)\\&=1.41421356237309504876 5...\end{aligned}$$

最后得到

$$1.41421356237309504880 1<\sqrt{2}<1.41421356237309504880 3,$$

这个 $\sqrt{2}$ 的近似值精确到了小数点后第 20 位.

(2) Euler-Maclaurin 公式

在本章前一节最后, 我们定义了 Bernoulli 多项式 $B_n(t)$:

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)\frac{x^n}{n!},\tag{9.27}$$

并且已经得到了 Bernoulli 多项式的如下几条性质:

$$B_0 = 1,\ B_1(t) = t - \frac{1}{2},\ B_n(0) = B_n(1) = B_n,\quad \forall\ n \geqslant 2.$$

现在我们再证明几条新的性质.

(i) $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$, $\forall\ n \geqslant 1$.

事实上, 在等式 (9.27) 两边关于 t 求导, 得

$$\frac{x^2 e^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n'(t)\frac{x^n}{n!},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(t)\frac{x^n}{n!},$$

对比上式两边 x^n 的系数即得 $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$. 从这个等式还可以知道

$$\int_0^1 B_n(t)dt = \int_0^1 \frac{B_{n+1}'(t)}{n+1}dt = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0,\quad \forall\ n \geqslant 1.$$

这实际上就确定了 $B_n(t)$ 的递推关系, 按照这个递推关系可以逐步求出这些多项式的具体表达式. 例如有

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6},\quad B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

(ii) $B_n(1-t) = (-1)^n B_n(t)$, $\forall\ n \geqslant 0$.

事实上, 利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-t)\frac{x^n}{n!} = \frac{xe^{(1-t)x}}{e^x - 1} = \frac{-xe^{-tx}}{e^{-x} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\frac{(-x)^n}{n!},$$

对比等式两边 x^n 的系数即可.

(iii) $B_{2n}(t) - B_{2n}$ 在 $t \in [0,1]$ 上不变号, $\forall\ n \geqslant 0$.

这一条可通过归纳法证明. 我们也可以这样来看: 由 (ii) 知 $B_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$, 因此函数 $B_{2n-1}(t)$ 在 $[0,1]$ 上有 0, $\dfrac{1}{2}$ 和 1 这三个零点. 我们断言这也是 B_{2n-1} 的仅有的三个零点. (反证法) 如果 $B_{2n-1}(t)$ 在 $[0,1]$ 上还有一个零点, 则根据微分中值定理, $B_{2n-2}(t) = \dfrac{B_{2n-1}'(t)}{2n-1}$ 在 $(0,1)$ 中至少有三个零点. 再由微分中值定理即知, $B_{2n-3}(t) = \dfrac{B_{2n-2}'(t)}{2n-2}$ 在 $(0,1)$ 中至少有两个零点, 从而在 $[0,1]$ 上至少有四个零点. 如此这样一直讨论下去, 最后会得出结论: $B_1(t)$ 在 $(0,1)$ 中至少有两个零点, 这就导出了矛盾. 这样我们就说明了, 当 n 为奇数时, $B_n(t)$ 在区间 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 和 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上不变号, 因此当 n 为偶数时, $B_n(t)$ 分别在区间 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 和 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上单调. 由 $B_n(0) = B_n(1)$ 易见此时 $B_n(t) - B_n(0)$ 在 $[0,1]$ 上不变号.

现在我们利用 Bernoulli 多项式来进一步研究积分的近似计算. 设 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上具有直到 $2m+2$ 阶连续导数的函数. 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)dB_1(t)\\ &= f(t)B_1(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(t)f'(t)dt\\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)dB_2(t)\\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}f'(t)B_2(t)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 B_2(t)f''(t)dt,\end{aligned}$$

利用 $B_3'(t)=3B_2(t)$, $B_3(0)=B_3(1)=0$ 以及 $B_4'(t)=4B_3(t)$, 再做两次分部积分:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1)-f'(0)] + \frac{1}{3!}\int_0^1 f''(t)dB_3(t)\\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1)-f'(0)] + \frac{1}{3!}f''(t)B_3(t)\Big|_0^1\\ &\quad - \frac{1}{3!}\int_0^1 B_3(t)f'''(t)dt\\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1)-f'(0)] - \frac{1}{4!}\int_0^1 f'''(t)dB_4(t)\\ &= \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2!}B_2[f'(1)-f'(0)] - \frac{1}{4!}B_4[f'''(1)-f'''(0)]\\ &\quad + \frac{1}{4!}\int_0^1 B_4(t)f^{(4)}(t)dt,\end{aligned}$$

我们可以一直象这样做下去, 最后得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt = {}& \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{m+1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)]\\ &+\frac{1}{(2m+2)!}\int_0^1 B_{2m+2}(t)f^{(2m+2)}(t)dt,\end{aligned}\tag{9.28}$$

这个公式称为 Euler-Maclaurin 公式. 由于 $B_{2m+2}(t)-B_{2m+2}$ 在 $[0,1]$ 上不变号, 由积分中值定理知

$$\begin{aligned}\int_0^1 (B_{2m+2}(t)-B_{2m+2})f^{(2m+2)}(t)dt &= f^{(2m+2)}(\xi)\int_0^1 (B_{2m+2}(t)-B_{2m+2})dt\\ &= -f^{(2m+2)}(\xi)B_{2m+2},\quad \xi\in[0,1].\end{aligned}$$

因此 (9.28) 可以改写为

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt = {}& \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)]\\ &-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi),\quad \xi\in[0,1].\end{aligned}\tag{9.29}$$

以上是对定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 f 进行讨论的. 对于一般的区间 $[a,b]$, 利用变量替换 $x=(b-a)t+a$ 就可以得到

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(b-a)^{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]$$
$$-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a),\quad \xi\in[a,b]. \tag{9.30}$$

我们还可以将区间 $[a,b]$ 作 n 等分, 在每一个小区间上均有上式成立, 这些等式加起来可得

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)] - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]$$
$$-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2m+2}\sum_{i=1}^{n}f^{(2m+2)}(\xi_i)\frac{b-a}{n},\quad \xi_i\in[0,1]. \tag{9.31}$$

其中 $x_i = a+\frac{i}{n}(b-a)$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 根据连续函数的介值定理, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f^{(2m+2)}(\xi_i) = f^{(2m+2)}(\xi),$$

因此 (9.31) 也可以改写为

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)] - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]$$
$$-\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a),\quad \xi\in[0,1]. \tag{9.32}$$

这些公式也都称为 Euler-Maclaurin 公式.

(3) Stirling 公式回顾

现在我们利用 Euler-Maclaurin 公式来研究函数 $\ln x$ 在区间 $[1,n]$ 上的近似积分. 我们首先再给出 Bernoulli 多项式的两条性质.

(iv) $B_n(\frac{1}{2}) = -[1-2^{1-n}]B_n$, $\forall\ n\geqslant 0$.

事实上, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{(x/2)^n}{n!} = \frac{x/2}{e^{(x/2)}-1} = \frac{1}{2}\frac{xe^{(x/2)}+x}{e^x-1}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{1}{2})\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}.$$

比较等式两边 x^n 的系数即得欲证结论.

(v) 在区间 $[0,1]$ 上, $B_{2n}(t)-B_{2n}$ 与 $-B_{2n}$ 同号, 因而 $B_{2n}(t)-B_{2n}$ 与 $B_{2n+2}(t)-B_{2n+2}$ 符号相反.

我们已经在 (iii) 中证明了 $B_{2n}(t)-B_{2n}$ 不变号, 因而其符号与 $B_{2n}(\frac{1}{2})-B_{2n}$ 相同. 利用 (iv) 以及 Bernoulli 数 B_{2n} 和 B_{2n+2} 符号相反即得欲证结论.

下面我们考虑定义在 $[1,+\infty)$ 上的函数 $f(t)$. 假设

(*) $f^{(2k)}$ 都具有相同的符号, 且 $f^{(2k+1)}\to 0\ (t\to\infty)$.

考虑 $f(t)$ 在区间 $[1,n]$ 上的积分. 将 $[1,n]$ 作 $n-1$ 等分, 在每一个长度为 1 的小区间上用 (9.28) 式, 我们有

$$\int_1^n f(t)dt=\sum_{i=1}^n f(i)-\frac{1}{2}f(n)-\sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(n)+R_n,$$

其中

$$\begin{aligned}R_n=&-\frac{1}{2}f(1)-\sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(1)\\&+\frac{1}{(2m+2)!}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^1(B_{2m+2}(t)-B_{2m+2})f^{(2m+2)}(i+t)dt,\end{aligned}$$

由条件 (*) 不难看出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n$ 存在, 记为 R. 于是

$$R_n-R=-\frac{1}{(2m+2)!}\sum_{i=n}^{\infty}\int_0^1(B_{2m+2}(t)-B_{2m+2})f^{(2m+2)}(i+t)dt.$$

如果做两次分部积分, 我们将得到

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{(2m+4)!}\sum_{i=n}^{\infty}\int_0^1(B_{2m+4}(t)-B_{2m+4})f^{(2m+4)}(i+t)dt\\&=(R_n-R)+\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}f^{2m+1}(n),\end{aligned}$$

根据 (v), 上式左端与右端第一项不同号, 因而右端两项不同号, 且存在 $\theta_n\in(0,1)$, 使得

$$R_n-R=-\theta_n\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}f^{(2m+1)}(n),$$

最后我们得到如下公式

$$\begin{aligned}\int_1^n f(t)dt=&\sum_{i=1}^n f(i)-\frac{1}{2}f(n)-\sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(n)\\&+R-\theta_n\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}f^{(2m+1)}(n),\quad \theta_n\in(0,1).\end{aligned}\tag{9.33}$$

对函数 $f(t)=\ln t$ 用这个公式, 得

$$\begin{aligned}n\ln n-n=&C+\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n-\sum_{k=1}^m\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{n^{2k-1}}\\&-\theta_n\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)}\frac{1}{n^{2k+1}},\quad \theta_n\in(0,1).\end{aligned}$$

用 §5.8 或 §7.1.5 中得到的 Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\delta_n} \tag{9.34}$$

代入前式并令 $n\to\infty$ 可知 $C = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$, 且得到 δ_n 的如下展开式

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{n^{2k-1}} + \theta_n\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)(2m+1)}\frac{1}{n^{2m+1}},\quad \theta_n\in(0,1).$$

例如, 取 $m=1$ 得

$$\delta_n = \frac{B_2}{2}\frac{1}{n} + \theta_n\frac{B_4}{12}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{12n} - \frac{\theta_n}{360n^3},\quad \theta_n\in(0,1);$$

再取 $m=2$ 得

$$\delta_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{\theta_n}{1260n^5},\quad \theta_n\in(0,1);$$

等等. (9.34) 也可写为

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51480n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\Big).$$

这个公式比 §7.1.5 节中得到的估计要精确得多.

§9.4.2 用级数构造函数

(1) 处处连续但无处可导的函数

在数学分析和微积分发展的早期, 人们猜测: 连续函数的不可导点至多只有可数个. 1872 年, Weierstrass 利用无穷级数的理论给出了一个反例:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\cdot\sin(b^n x),\quad (0<a<1,\ ab\geqslant 1)$$

这个函数处处连续但无处可导! 1930 年, Van Der Waerden 给出了更简单的例子, 下面我们讨论的例子基本上就是他举出来的.

用 $\varphi(x)$ 表示 x 与离它最近的整数之间的距离, 这是一个周期为 1 的连续函数,

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(4^n x)}{4^n},\ x\in\mathbb{R}.$$

因为 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{1}{2}$, 故这个函数项级数在整个 $(-\infty,\infty)$ 中一致收敛, 这说明 f 在 $(-\infty,\infty)$ 中处处连续.

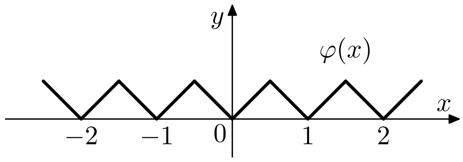


图 9.2 锯齿函数

下面我们说明 f 无处可导. 首先注意到 f 也是周期函数, $f(x)=f(x+1)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. 我们只要说明 f 在 $[0,1)$ 中无处可导即可. 先以 $x_0=0$ 为例看一下. 取 $h_m=4^{-m}$, 则当 $n\leqslant m-1$ 时, $\varphi(4^n h_m)=4^n h_m$; $n\geqslant m$ 时, $\varphi(4^n h_m)=0$. 因此

$$\frac{f(h_m)-f(0)}{h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\varphi(4^n h_m)}{4^n\cdot h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}1=m,\quad \forall\ m\geqslant 1.$$

因为 $h_m\to 0\ (m\to\infty)$, 故上式表明 f 在 0 处不可导.

对于一般的 $x_0\in(0,1)$, 做法类似. 把 x_0 写成 4 进位无穷小数 (对于有限小数, 可在未尾添无穷个 0): $x_0=0\cdot x_1x_2x_3\cdots x_m\cdots$, 其中 x_m 可取 0, 1, 2, 3. 我们这样选取 h_m:

$$h_m=\begin{cases}4^{-m}, & \text{当 } x_m=0 \text{ 或 } 2;\\ -4^{-m}, & \text{当 } x_m=1 \text{ 或 } 3.\end{cases}$$

在 4 进制下, $4^n x_0=x_1\cdots x_n\cdot x_{n+1}\cdots x_m\cdots$, 且

$$4^n(x_0+h_m)=x_1\cdots x_n\cdot x_{n+1}\cdots(x_m\pm 1)\cdots.$$

当 $n\leqslant m-1$ 时, 根据 h_m 的选取, $4^n x_0$ 和 $4^n(x_0+h_m)$ 之间不含其它整数或半整数. 此时 $\varphi(4^n(x_0+h_m))-\varphi(4^n x_0)=\pm 4^n\cdot h_m$, 且

$$\frac{f(x_0+h_m)-f(x_0)}{h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\varphi(4^n(x_0+h_m)-\varphi(4^n x_0))}{4^n\cdot h_m}+0=\sum_{n=0}^{m-1}\pm 1.$$

特别地, m 分别取奇数和偶数时, 上式右边也是奇数或偶数, 因此, $h_m\to 0\ (m\to\infty)$, 但极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{f(x_0+h_m)-f(x_0)}{h_m}$ 不存在. 故 f 在 x_0 处不可导.

注. Weierstrass 要求 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, 现在的条件是 Hardy 在 1916 年改进的. 在后续的分析课程中将学习到这样的事实: "大部分" 连续函数都是处处不可导的!

(2) 填满空间的曲线 (Peano 曲线)

1890 年, Peano 构造了连续曲线 $\sigma: I\to I^2, I=[0,1]$, 使得 $\sigma(I)=I^2$. 这和人们的直观想象大相径庭. 下面我们来给出一个例子, 它是 1938 年由 Schoenberg 提出的.

考虑连续函数

$$\psi(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,\frac{1}{3}],\\ 3t-1, & t\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\\ 1, & t\in[\frac{2}{3},1].\end{cases}$$

将 ψ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的偶函数:

$$\psi(t)=\psi(t+2),\quad \psi(t)=\psi(-t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

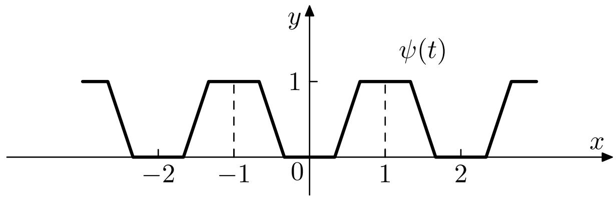


图 9.3 另一锯齿函数

令

$$\begin{cases}x(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\psi(3^{2n}t)}{2^{n+1}},\\ y(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\psi(3^{2n+1}t)}{2^{n+1}},\end{cases}\qquad t\in[0,1].$$

因为 $0\leqslant\psi\leqslant1$, 故上面的两个级数一致收敛, 从而 $x(t)$, $y(t)$ 连续,

$$\sigma(t)=(x(t),\ y(t)):\ I\to I\times I$$

为连续曲线. 可以证明:

(1) $\sigma(I)=I\times I$; (2) $x(t)$, $y(t)$ 无处可导.

注. (i) 类似地可构造填满 I^3 的连续曲线.

(ii) (思考题) 如果 σ 是 C^1 曲线, 则还它能填满 I^2 吗?

(3) 光滑函数的 Taylor 展开的系数可以为任意实数列

设 $a_n\in\mathbb{R}$ $(n\geqslant0)$, 记 $\xi_n=n+\sum\limits_{i=0}^{n}|a_i|$, 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\phi(\xi_nx)x^n,$$

其中 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, $0\leqslant\phi\leqslant1$, 且

$$\phi(x)=1,\quad \forall\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}];\quad \phi(x)=0,\quad \forall\ |x|\geqslant1.$$

当 $n\geqslant1$, $|x|\leqslant\xi_n^{-1}$, 时,

$$\Big|\frac{a_n}{n!}\phi(\xi_nx)x^n\Big|\leqslant\frac{|a_n|}{n!}|x|^n\leqslant\frac{|a_n|}{n!}\frac{1}{(\xi_n)^n}\leqslant\frac{1}{n!},$$

而 $|x| > \xi_n^{-1}$ 时上式也成立, 故定义 f 的级数一致收敛, f 连续, 且 $f(0) = a_0$.

可以证明, f 是无穷次可导的, 且

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

(*) ϕ 是所谓的鼓包函数, 它可以这样构造: 先取

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

则 g 是光滑函数.

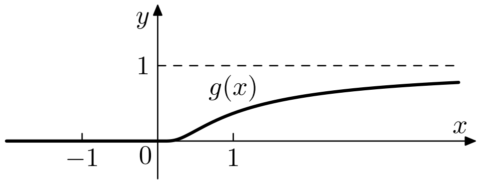


图 9.4 一个特殊的光滑函数

再取

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(1-x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

h 也是光滑函数. 最后, 令

$$\phi(x) = \begin{cases} h(2x+2), & x \leqslant 0, \\ h(-2x+2), & x > 0. \end{cases}$$

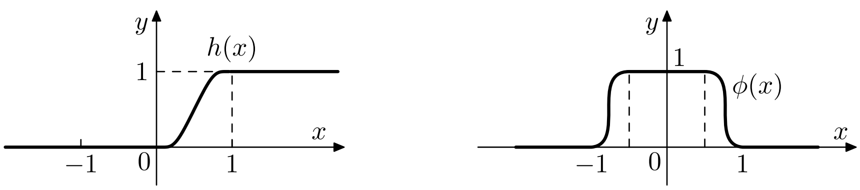


图 9.5 鼓包函数的构造

第十章　Fourier 分析

我们知道, 光滑函数在局部上可以用多项式逼近, 由此可得出幂级数的概念. 为此在前一章中我们还讨论了更一般的函数项级数. 在工程技术问题中, 人们经常遇到周期现象, 一个自然的想法就是, 能否将较为复杂的周期现象分解为简单周期现象的叠加? 历史上, Fourier 在研究热传导问题时用这种想法得出了丰富的结果, 由此引发的很多问题对现代分析学产生了深远的影响.

§10.1　Fourier 级数

函数列

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

称为三角函数系, 如果这一列函数记为 $\{\varphi_i(x)\}$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0,\quad \forall\ i\neq j,$$

这个积分性质称为三角函数系的正交性. 有限和

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为三角多项式, 而形式和

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为三角级数, 其中 a_0, a_k, b_k 等称为该三角级数的系数.

三角函数都是周期为 2π 的函数. 一个自然的问题是, 如果 f 是一个周期为 2π 的函数, 能否用三角多项式去逼近它? 为了讨论这一问题, 以下我们假定 f 总是 Riemann 可积或广义绝对可积的函数 (即有瑕点但瑕积分绝对收敛的函数).

定义 10.1.1 (Fourier 系数). *设 f 如上. 令*

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx,\quad k=1,\ 2,\ \cdots.$$

a_0, a_k, b_k 称为 f 的 Fourier 系数, 形式和

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为 f 的 *Fourier* 级数或 *Fourier* 展开, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

注. (1) 如果 $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 一致收敛, 则由逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\Big) = a_0\pi.$$

同理,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kxdx + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos mxdx \\ &\qquad + b_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin mxdx\Big) \\ &= 0 + a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx + 0 = a_k\pi,\end{aligned}$$

对于 b_k 有类似结果, 这就是为什么我们要象前面那样定义 Fourier 系数.

(2) 对于 2π 周期函数, 定义其 Fourier 系数时可以在长度为 2π 的任意区间上积分. 简单的观察表明, 如果 f 为奇函数, 则 $a_k = 0$, 此时的 Fourier 展开称为正弦级数; 如果 f 为偶函数, 则 $b_k = 0$, 此时的 Fourier 展开称为余弦级数.

例 10.1.1. 设 f 为 2π 周期函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0,\ \pm\pi, \\ -1/2, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

求 f 的 *Fourier* 展开.

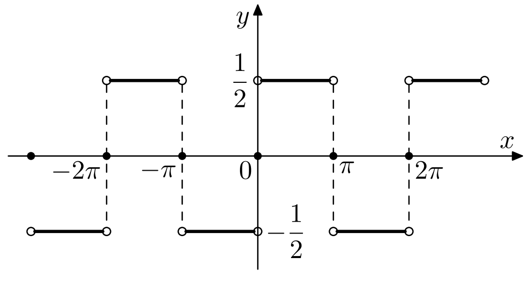


图 10.1 波形函数

解. f 为奇函数, 因此 $a_k = 0$. 而

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\sin kx dx - \int_{-\pi}^{0}\sin kx dx\right] \\ &= \frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k]. \end{aligned}$$

因此就得到了 f 的 Fourier 展开:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

例 10.1.2. *设 f 为 2π 周期函数, 且 $f(x)=x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. 求 f 的 Fourier 展开.*

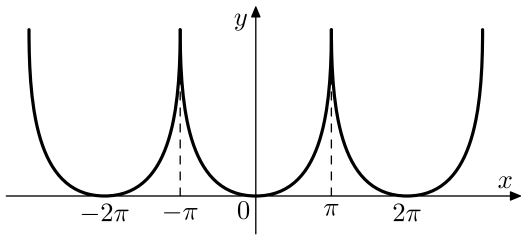


图 10.2 二次函数的周期展开

解. f 为偶函数, 故 $b_k = 0$, 利用分部积分得

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{k}x\sin kx dx \\ &= (-1)^k\frac{4}{k^2}, \quad (k>0) \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2, \end{aligned}$$

这就得到了 f 的 Fourier 展开:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

为了研究 Fourier 展开的收敛性, 我们需要对系数 a_k, b_k 做一些估计. 下面的结果我们在第六章第二节中已经证明过了, 现在再复习一下.

定理 10.1.1 (Riemann-Lebesgue)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积或广义绝对可积, 则*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

证明. 任给 $\varepsilon > 0$, Riemann 可积或广义绝对可积的函数 f 可用阶梯函数逼近, 即存在阶梯函数 g, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

此时,

$$\Big| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \Big| \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对 $[c, d] \subset [a, b]$ 上的常值函数证明即可: 如果 $f = \mu$, 则

$$\begin{aligned} \Big| \int_c^d \mu \cos \lambda x dx \Big| &= \Big| \mu \cdot \frac{1}{\lambda} (\sin \lambda d - \sin \lambda c) \Big| \\ &\leqslant \frac{2|\mu|}{\lambda} \to 0 \quad (\lambda \to +\infty). \end{aligned}$$

对 $\sin \lambda x$ 的证明是完全类似的. □

推论 10.1.2. *设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积或广义绝对可积, 则其 Fourier 系数 $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ $(k \to +\infty)$.*

如果 f 有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计. 例如, 设 $f \in C^1[-\pi, \pi]$, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = o\big(\frac{1}{n}\big), \quad (\mathrm{Riemann-Lebesgue}) \end{aligned}$$

同理可证 $a_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$. 一般地, 设 $f \in C^k([-\pi, \pi])$, $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$, 则

$$a_n = o\big(\frac{1}{n^k}\big), \quad b_n = o\big(\frac{1}{n^k}\big).$$

习题 10.1

1. 证明, 三角多项式的 Fourier 展开就是它自己.

2. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中求下列函数的 Fourier 展开:

$$(1)\ |x|; \quad (2)\ \cos^4 x; \quad (3)\ \sin^4 x; \quad (4)\ x \sin x.$$

3. 设 f 是周期为 2π 的函数, 且

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & x\in[0,2\pi);\\ \frac{\pi}{2}, & x=2\pi.\end{cases}$$

求 f 的 Fourier 展开.

4. 设 f 的 Fourier 系数为 a_n, b_n. 试求 $f(x)\sin x$, $f(x+h)$ $(h\in\mathbb{R})$ 的 Fourier 系数.

5. 设 f 是周期为 2π 的可积函数, a_n, b_n 为其 Fourier 系数.

(1) 当 $n\geqslant 1$ 时, 证明

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})]\sin nxdx.$$

(2) 假设 f 是 α 阶 Hölder 连续函数, 利用 (1) 证明

$$a_n=O\big(\frac{1}{n^\alpha}\big),\quad b_n=O\big(\frac{1}{n^\alpha}\big)\quad(n\to\infty).$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上二阶连续可微, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, 证明其 Fourier 系数有如下估计

$$a_n=o\big(\frac{1}{n^2}\big),\quad b_n=o\big(\frac{1}{n^2}\big)\quad(n\to\infty).$$

7. 求下列极限:

$$(1)\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2\lambda x}{1+x^2}dx;\qquad(2)\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\lambda xdx.$$

8. 设 f 是周期为 2π 的可积函数. 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 上单调递减, 证明其 Fourier 系数 $b_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$. (提示: 第二积分中值定理.)

9. 设 f 为 $(-\pi,\pi)$ 上单调递增有界函数, 则

$$a_n=O\big(\frac{1}{n}\big),\quad b_n=O\big(\frac{1}{n}\big)\quad(n\to\infty).$$

10. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上的无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛, 证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda xdx=0.$$

§10.2 Fourier 级数的收敛性

在前一节我们已看到, 如果 $f \in C^2[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, 则其 Fourier 系数满足估计 $a_n = o(n^{-2})$, $b_n = o(n^{-2})$, 因而 Fourier 展开一致收敛. 本节研究一般情形下 Fourier 级数的收敛性.

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx,$$

称为 Dirichlet 核. 利用等式

$$\sin\frac{1}{2}x\cos kx = \frac{1}{2}\big[\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x\big]$$

可以求出 Dirichlet 核的表达式如下

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}, \quad \forall\ x \neq 2k\pi. \tag{10.1}$$

当 $x = 2k\pi$ 时, 规定 $\sigma_n(x) = n + \dfrac{1}{2}$, 此时 σ_n 为连续函数, 且

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx = \int_0^\pi (\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx)dx = \frac{\pi}{2}.$$

应用: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. 这个积分已经在第七章第四节和第九章第二节中出现过, 现在我们用新方法再算一次:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt \qquad (x\to(n+\frac{1}{2})t) \\
&= \frac{\pi}{2} + \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \big(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\big)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt \\
&= \frac{\pi}{2}. \qquad (\mathrm{Riemann-Lebesgue})
\end{aligned}$$

其中, 因为

$$\lim_{t\to 0}\big(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\big) = \lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t}{2} - t}{2t\sin\frac{t}{2}} = 0,$$

故 $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ 可看成 $[0,\pi]$ 中连续函数, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理. □

记 f 的 Fourier 展开的部分和为 $S_n(x)$, 则

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kxdt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\sin kxdt\Big)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\Big]dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\Big]dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sigma_n(u)du,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了变量代换 $u = t - x$, 并且利用了被积函数的周期性, 即在 $[-\pi - x,\ \pi - x]$ 上的积分等于在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分. 利用 (10.1), 并注意 σ_n 是偶函数, 我们可以进一步将上式改写为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

任给 $\delta > 0$, 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du\\
&\quad + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})udu\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du,
\end{aligned}$$

因此, $S_n(x)$ 的收敛性只和 f 在 x 附近的性态有关, 这是 Riemann 的发现, 有时称为 Riemann 局部化原理.

定理 10.2.1 (Dini 判别法)**.** *设 f 如前. 如果存在 $\delta > 0$, 使得*

(1) f 在 x 处的右极限 $f(x+0)$ 和左极限 $f(x-0)$ 存在;

(2) 积分

$$\int_0^{\delta}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}du,\quad \int_0^{\delta}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}du,$$

绝对收敛, 则 f 的 Fourier 展开在点 x 处收敛于值 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

证明基本上是应用 Riemann-Lebesgue 引理, 以及注意到函数 $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[0, \delta]$ 上的连续性. 下面我们对一个特殊情形加以证明, 这个情形对大多数应用而言是足够的.

定义 10.2.1. 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 如果存在 $[a,b]$ 的分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

使得在每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 上定义的函数

$$f_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1}+0), & x = t_{i-1}, \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i), \\ f(t_i - 0), & x = t_i, \end{cases}$$

都是 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的可导函数, 则称 f 是分段可导函数.

定理 10.2.2 (Dirichlet)**.** 设 f 是一个周期为 2π 的分段可导函数, 则对任意的 $x \in [-\pi, \pi]$, f 的 *Fourier* 展开在 x 处收敛到 $\dfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

证明. 由前面的计算以及 Riemann-Lebesgue 引理, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du + \frac{1}{2}f(x+0) \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du + \frac{1}{2}f(x-0) \\
&= \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].
\end{aligned}$$

最后的等式是因为, 如果 f 分段可导, 则

$$\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}} \quad 和 \quad \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

关于 u 是分段连续 (可积) 的, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理. □

注. 分段可导的条件只是用来保证 Riemann-Lebesgue 引理可用. 从证明过程即可看出, 如果 f 在 x 附近满足 α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Hölder 条件, 则定理结论仍然成立.

前节例 10.1.1 和例 10.1.2 都满足上述定理的条件, 因此, 在例 10.1.1 中取 $x = 1$ 就得到

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1},$$

在例 10.1.2 中取 $x = \pi$ 就得到

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

下面是一些进一步的例子.

例 10.2.1. 求函数 $f(x) = \cos\mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$ 的 *Fourier* 展开 (μ 不是整数).

解. 将 f 延拓为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的周期函数, 这是偶函数, 因此 $b_k = 0$. 而

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu x\cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(\mu-k)x + \cos(\mu+k)x] dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\mu-k)\pi}{\mu-k} + \frac{\sin(\mu+k)\pi}{\mu+k}\right] = \frac{2\mu(-1)^k}{\pi}\frac{\sin\mu\pi}{\mu^2-k^2}. \end{aligned}$$

由 Dirichlet 定理可得

$$\cos\mu x = \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\Big(\frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\mu^2-n^2}\cos nx\Big), \quad \forall\ x \in [-\pi, \pi].$$

在上式中取 $x = \pi$ 得

$$\cos\mu\pi = \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\Big(\frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mu^2-n^2}\Big),$$

上式可改写为

$$\cot\pi\mu - \frac{1}{\pi\mu} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{2\mu}{\mu^2-n^2}.$$

当 $0 \leqslant \mu \leqslant x < 1$ 时, 上式右边的无穷求和关于 μ 一致收敛, 从而可逐项积分:

$$\int_0^x \big(\cot\pi\mu - \frac{1}{\pi\mu}\big)d\mu = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \ln\big(1 - \frac{x^2}{n^2}\big),$$

由此得到 $\sin\pi x$ 的如下展开式:

$$\sin\pi x = \pi x\big(1 - \frac{x^2}{1^2}\big)\big(1 - \frac{x^2}{2^2}\big)\big(1 - \frac{x^2}{n^2}\big)\cdots. \tag{10.2}$$

在第九章第二节已经得到过这个等式了, 见 (9.5) 式.

例 10.2.2. 跟上例类似, 我们有

$$\sin\mu x = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n n}{\mu^2-n^2}\sin nx, \quad \forall\ x \in (-\pi, \pi).$$

如果一个函数仅在 $(0, \pi)$ 上定义, 则我们可以首先将它延拓为周期为 2π 的函数, 然后再作 Fourier 展开. 常用的延拓有奇延拓和偶延拓, 即分别延拓为奇函数和偶函数.

例 10.2.3. 将函数

$$f(x) = x, \quad x \in (0, \pi)$$

分别作奇延拓和偶延拓, 然后分别求 *Fourier* 展开.

解. 奇延拓: 令 $f(x)=x$, $x\in(-\pi,0)$, 在 0 和 $\pm\pi$ 处规定 f 为 0.

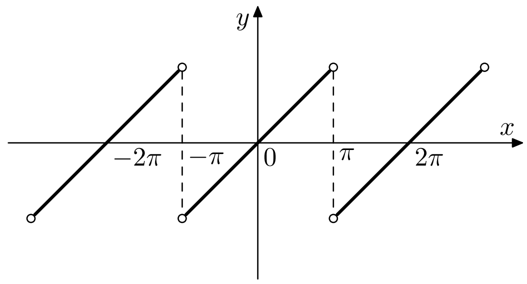


图 10.3 奇延拓

则 Fourier 系数为

$$
\begin{aligned}
a_k=0,\quad b_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kxdx\\
&=\frac{2}{\pi}x\frac{-1}{k}\cos kx\Big|_0^\pi+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{k}\cos kxdx\\
&=(-1)^{k-1}\frac{2}{k}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
x=2\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},\quad 0\leqslant x<\pi.
$$

偶延拓: 令 $f(x)=-x$, $x\in(-\pi,0)$, 在 0 处 $f(0)=0$, 在 $\pm\pi$ 处 f 为 π.

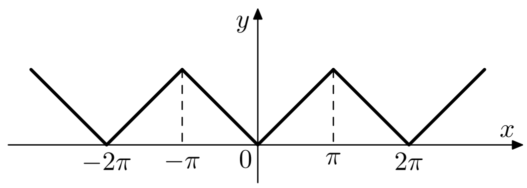


图 10.4 偶延拓

此时 Fourier 系数为

$$
\begin{aligned}
b_k=0,\quad a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi\\
a_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kxdx=\frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k-1].
\end{aligned}
$$

因此

$$
x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\ 0\leqslant x\leqslant\pi.
$$

一般地, 如果一个函数周期为 $2l$, 和周期 2π 的情形类似, 令

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则 f 有 Fourier 展开

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

通过变量替换 $t = \dfrac{\pi x}{l}$ 可以将周期 $2l$ 的函数变为周期 2π 函数, 因此容易看出, Dirichlet 定理对于周期为 $2l$ 的函数仍成立.

例 10.2.4. *设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 且*

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

求其 Fourier 展开.

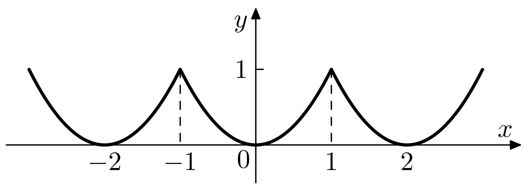


图 10.5 一般周期函数的展开

解. f 为偶函数, 因此 $b_k = 0$. 而

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$
$$a_n = 2\int_{0}^{1} x^2\cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n, \quad (\text{分部积分})$$

这说明

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x, \quad x \in [-1, 1].$$

如果作变量替代 $t = \pi x$, 则上式就是前节例 10.1.2 中的等式. 如果将 x 变为 $\pi^{-1}(x-\pi)$, 就得到如下等式:

$$(\bigstar) \quad x - \frac{x^2}{2\pi} = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

它当然也可以通过对 $f(x) = x - \frac{x^2}{2\pi}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 作 Fourier 展开得到, 下一节我们将要用到这个等式.

习题 10.2

1. 利用等式
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} \cos kt dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$
求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 之和.

2. 证明
$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})x = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \forall\ n \geqslant 1,$$
并由此说明
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} dx = n\pi, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

3. 求 $|\sin x|$ 和 $|\cos x|$ 的 Fourier 展开级数, 并说明其 Fourier 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛到自身.

4. 利用本节第一例证明下面的等式 $(\mu \notin \mathbb{Z})$:
$$\frac{1}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{\mu\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \mu\pi}{(\mu\pi)^2 - (n\pi)^2}.$$

5. 求下列函数的 Fourier 展开:

   (1) $f(x) = e^{ax}$, $x \in (-\pi, \pi)$; (2) $f(x) = x^2 \sin^2 x$, $x \in (-\pi, \pi)$;

   (3) $f(x) = \sin ax$, $x \in (-\pi, \pi)$, a 不是整数.

6. 将下列分段定义的函数展开为 Fourier 余弦级数:

   (1) $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$; $f(x) = 2 - x$, $x \in [1, 2]$.

   (2) $f(x) = 1$, $x \in [0, a]$; $f(x) = 0$, $x \in [a, \pi]$.

7. 将下列函数展开为 Fourier 正弦级数:
$$(1)\ f(x) = \cos 2x,\ x \in [0, \pi]; \quad (2)\ f(x) = x - \frac{x^2}{2},\ x \in [0, 1].$$

8. 在区间 $(-l, l)$ 上将下列函数展开为 Fourier 级数:
$$(1)\ x, \quad (2)\ x + |x|.$$

9. 将函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

展开成周期为 3 的 Fourier 级数.

10. 设 f 为 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数, g 为 $\mathbb{R}$ 上周期函数, 周期为 T 且在 $[0,T]$ 上可积. 证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx=\frac{1}{T}\int_a^b f(x)dx\int_0^T g(x)dx.$$

11. $(*)$ 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ $(0<a<\pi)$ 上连续, 证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^a f(x)\frac{\sin^2\lambda x}{\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$

§10.3 Parseval 恒等式

在前一节我们考虑了 Fourier 级数的逐点收敛性. 本节我们考虑积分意义下的收敛性, 这时对函数的要求较低.

设 $[a,b]$ 为闭区间, 我们定义函数集合 $R^2[a,b]$ 如下: $R^2[a,b]$ 中的函数 f Riemann 可积, 或 f 有瑕点但 f^2 积分收敛. 显然, $R^2[a,b]$ 为线性空间, 且若 f, $g\in R^2[a,b]$, 则仍有 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\leqslant\Big[\int_a^b f^2(x)dx\Big]^{\frac12}\cdot\Big[\int_a^b g^2(x)dx\Big]^{\frac12}.$$

定理 10.3.1 (Parseval 等式)**.** *设 $f\in R^2[-\pi,\pi]$, 且 f 的 Fourier 展开为*

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).\tag{10.3}$$

为了简单起见, 下面我们以 f Riemann 可积为例给出证明, 一般情形的证明只需略作改动即可.

(1) 记

$$S_n(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

由三角函数系的正交性质, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2})^2 dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} a_k^2\cos^2 kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k^2\sin^2 kxdx\Big) \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2). \qquad (10.4)
\end{aligned}
$$

其次就有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_n(f)]^2dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot S_n(f)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2dx - \frac{2}{\pi}\Big[\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} fdx + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \\
&\quad + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx\Big)\Big] + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2dx - 2\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\Big] + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx, \qquad (10.5)
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2dx. \qquad (10.6)
$$

根据以上几式可知, (10.3) 式成立

$$
\Longleftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f^2dx \Longleftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}[f-S_n(f)]^2dx \to 0. \qquad (10.7)
$$

(2) 如果 (10.3) 对 $f,\ g \in R^2[a,b]$ 均成立, 则当 $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ 时,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}[\lambda f+\mu g - S_n(\lambda f+\mu g)]^2dx &= \int_{-\pi}^{\pi}[\lambda(f-S_n(f)) + \mu(g-S_n(g))]^2dx \\
&\leqslant 2\lambda^2\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_n(f)]^2dx + 2\mu^2\int_{-\pi}^{\pi}[g-S_n(g)]^2dx.
\end{aligned}
$$

由 (10.7) 知, (10.3) 式对函数 $\lambda f+\mu g$ 也成立.

(3) 显然, (10.3) 对常值函数成立. 下面考虑函数

$$
\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < a, \\ 1, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & b < x < \pi. \end{cases}
$$

将 φ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 函数, 其 Fourier 系数为

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = \frac{1}{\pi}(b-a),\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \cos kxdx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}(\sin kb - \sin ka),\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \sin kxdx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}(\cos ka - \cos kb).
\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\\
&= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[(\sin kb - \sin ka)^2 + (\cos kb - \cos ka)^2\right]\\
&= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}[1 - \cos k(b-a)]\\
&= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k(b-a)}{k^2}\\
&= \frac{b-a}{\pi} \qquad \text{(用到前一节最后的等式(★))}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^2(x)dx.
\end{aligned}$$

(4) 由 (2), (3) 知 (10.3) 对阶梯函数成立.

(5) 现在设 f 可积, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 g 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2dx \leqslant \varepsilon.$$

因为 (10.3) 对 g 成立, 故 n 充分大时

$$\int_{-\pi}^{\pi}[g - S_n(g)]^2dx \leqslant \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}[f - S_n(f)]^2dx &\leqslant 3\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}[g - S_n(g)]^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}[S_n(g-f)]^2dx\right\}\\
&\leqslant 3\left\{\varepsilon + \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi}(g-f)^2dx\right\} \quad \text{(用到 (10.3))}\\
&\leqslant 9\varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f - S_n(f)]^2dx \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

即 (10.3) 对 f 成立. □

推论 10.3.2 (广义 Parseval 等式)**.** *设 f, $g \in R^2[-\pi,\pi]$, 则*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

其中 a_n, b_n 是 f 的 Fourier 系数, α_n, β_n 是 g 的 Fourier 系数.

证明. 分别对 $f+g$ 和 $f-g$ 应用 Parseval 等式, 然后二者相减即可. □

推论 10.3.3 (惟一性)**.** *设 f, g 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, 如果 f 和 g 的 Fourier 系数相同, 则 $f \equiv g$.*

证明. 考虑 $f-g$, 其 Fourier 系数恒为 0, 由 Parseval 等式,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2dx = 0.$$

由 $f-g$ 连续知 $f \equiv g$. □

推论 10.3.4. *设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 如果其 Fourier 展开一致收敛, 则级数和必为 f.*

证明. 记其 Fourier 展开的和为

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则由一致收敛性知, 上式可逐项积分, 根据本章开头的计算可知 $S(x)$ 的 Fourier 系数和 f 的 Fourier 系数相同. 由前一推论知 $S(x) \equiv f(x)$. □

例 10.3.1. *由前节例 10.1.2 及 Parseval 等式得*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4dx = \frac{1}{2}\big(\frac{2}{3}\pi^2\big) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{4}{n^2}\big)^2$$

整理以后就得到下面的等式

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

习题 10.3

1. 设 $T_n(x) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$ 为三角多项式, 利用三角函数系的正交性质证明, 对任何 Riemann 可积函数 f, 均有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx,$$

   其中 $S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 展开的部分和, 等号成立当且仅当 $A_0 = a_0$, $A_k = a_k$, $B_k = b_k$ $(k \geqslant 1)$.

2. 判断下列级数是否为某个 Riemann 可积函数的 Fourier 展开:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\ (p>1).$$

3. 证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4},\quad x\in[-\pi,\pi],$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{\pi^2}{12}x-\frac{x^3}{12},\quad x\in[-\pi,\pi].$$

4. 利用 $f(x)=x^3$ 的 Fourier 展开及 Parseval 等式求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6}$.

5. 利用函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

的 Fourier 展开求下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

6. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微, 且

$$f(-\pi)=f(\pi),\qquad \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0.$$

如果 f' 可积并平方可积, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big(f'(x)\big)^2dx\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\big)^2dx,$$

并求等号成立的条件.

7. 证明

$$(1)\ \int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx=-\frac{\pi^2}{6},\quad (2)\ \int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx=-\frac{\pi^2}{12}.$$

8. (*) 证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\ln\Big(2\cos\frac{x}{2}\Big),\quad x\in(-\pi,\pi),$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\Big(2\sin\frac{x}{2}\Big),\quad x\in(0,2\pi).$$

§10.4 Fourier 级数的积分和微分

我们首先说明, 不管收敛与否, 可积函数的 Fourier 级数总是可以逐项积分的.

定理 10.4.1 (Reymond). *设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 其 Fourier 展开为*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx).$$

则对任意区间 $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$, 有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx + b_n\sin nx)dx.$$

证明. 考虑 §10.3 中用到的特征函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x\in[a,b], \\ 0, & x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi], \end{cases}$$

其 Fourier 系数记为 α_n,β_n, 则由广义 Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx = \frac{a_0}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

在上式中代入

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = \frac{1}{\pi}(b-a), \\
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \cos nxdx, \\
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \sin nxdx,
\end{aligned}$$

即得欲证之等式. □

为了考虑 Fourier 级数的微分, 我们先考虑一致收敛性.

定理 10.4.2. *设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, $f(-\pi)=f(\pi)$. 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可导, 且 f' Riemann 可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad \forall\ x\in[-\pi,\pi].$$

证明. 根据前一节推论 10.3.4, 只要证明上式右边是一致收敛就可以了. 事实上, 记 f' 的 Fourier 系数分别为 a_n', b_n', 则由分部积分得 (其中用到条件 $f(-\pi)=f(\pi)$)

$$\begin{aligned}
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)n\sin nxdx = nb_n, \\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)n\cos nxdx = -na_n.
\end{aligned}$$

对可积函数 f' 用 Parseval 等式得

$$\frac{1}{2}(a_0')^2+\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n')^2+(b_n')^2]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f')^2dx.$$

另一方面, 我们有估计

$$\begin{aligned}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|&\leqslant|a_n|+|b_n|\\&=\frac{1}{n}|a_n'|+\frac{1}{n}|b_n'|\\&\leqslant\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+|a_n'|^2\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+|b_n'|^2\Big),\end{aligned}$$

根据函数项级数的 Weierstrass 判别法知 f 的 Fourier 展开的确是一致收敛的. □

根据以上证明可知, 在定理的条件下, f' 的 Fourier 展开为

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),$$

一般来说, 要上式成为等式的话需要加进一步的条件.

定理 10.4.3. *设 f 是以 2π 为周期的连续可导函数. 如果 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段可导, 则 f 的 Fourier 展开*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可在 $[-\pi,\pi]$ 上逐次求导:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),$$

当 f'' Riemann 可积时, 上式右边的级数还是一致收敛的.

证明. 应用本章第二节 Dirichlet 定理和定理 10.4.2 即可. □

应用定理 10.4.2 我们可以用多项式去一致地逼近闭区间上的连续函数.

定理 10.4.4 (Weierstrass)**.** *设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, $f(-\pi)=f(\pi)$. 则任给 $\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $T(x)$, 使得*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon,\quad\forall\ x\in[-\pi,\pi].$$

证明. 首先, 连续函数 f 可以用分段线性函数一致逼近. 即存在周期为 2π 的分段线性函数 g, 使得

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ x\in[-\pi,\pi].$$

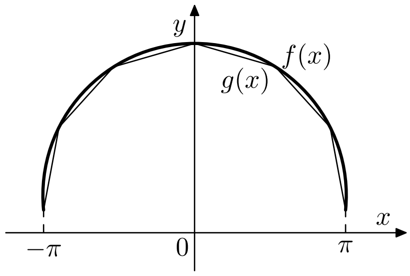


图 10.6 周期的分段线性逼近

其次, g 满足定理 10.4.2 的条件, 故其 Fourier 展开一致收敛于 g. 即 n 充分大时

$$|g(x)-S_n(g)(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

这说明

$$|f(x)-S_n(g)(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-S_n(g)(x)|<\varepsilon.$$

这就证明了定理. □

推论 10.4.5. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, $f(-\pi)=f(\pi)$. 则任给 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\quad \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

证明. 由 Weierstrass 定理, 存在三角多项式 $T(x)$ 使得

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

由于三角函数的 Taylor 展开都是一致收敛的, 从而存在多项式 $P(x)$ 使得

$$|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

这说明

$$|f(x)-P(x)|\leqslant|f(x)-T(x)|+|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

推论 10.4.6. f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x)-P(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall\, x\in[a,b].$$

证明. 利用线性变换 $t=\dfrac{\pi}{b-a}(x-a)$ 把 $[a,b]$ 上的函数变为 $[0,\pi]$ 上的函数. 将此函数以 2π 为周期作偶延拓, 然后利用前一推论即可, 注意线性变换将多项式仍变成多项式. □

习题 10.4

1. 证明等式
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^4}=\frac{\pi}{96}(\pi-2x)(\pi+2\pi x-2x^2),\quad x\in[0,\pi].$$
(提示: 可从已知级数出发逐项积分.)

2. 证明, 三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为某个 Riemann 可积函数的 Fourier 展开的必要条件是级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

3. 设 $f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的连续函数. 证明, 任给 $\varepsilon>0$, 存在由余弦函数组成的三角多项式 $P(x)$, 使得
$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\quad \forall\ x\in[0,\pi].$$

4. 设 $f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的连续函数, 且 $f(0)=f(\pi)=0$. 证明, 任给 $\varepsilon>0$, 存在由正弦函数组成的三角多项式 $P(x)$, 使得
$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\quad \forall\ x\in[0,\pi].$$

5. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果
$$\int_a^b x^n f(x)dx=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$
则 $f(x)=0$. (提示: 用多项式逼近 f.)

6. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 如果对任意正整数 $n\geqslant 1$, 均有
$$\int_a^b x^n f(x)dx=0,$$
则 $f(x)=0$.

7. 设 $f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的连续函数, 如果
$$\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$
则 $f(x)=0$.

8. 设 $f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的连续函数, 如果
$$\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=0,\ n=1,2,\cdots,$$
则 $f(x)$ 为常值函数. (提示: 考虑 $f(x)-c$.)

9. 设 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的 Riemann 可积函数, 且 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. 证明, 函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的 Fourier 展开在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到它自己.

10. (*) Bernoulli 多项式 $\varphi_n(x)$ 可以如下递归地定义:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n'(x) = n\varphi_{n-1}(x), \quad \int_0^1 \varphi_n(x)dx = 1,$$

证明, 在 $[0,1]$ 区间上, 当 $k \neq 0$ 为偶数时,

$$\varphi_k(x) = (-1)^{1+k/2}\frac{2(k!)}{(2\pi)^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\cos 2\pi nx,$$

当 $k \neq 1$ 为奇数时,

$$\varphi_k(x) = (-1)^{(k+1)/2}\frac{2(k!)}{(2\pi)^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\sin 2\pi nx.$$

§10.5 Fourier 级数的进一步讨论

本节内容可作为选读材料.

§10.5.1 平均收敛性

我们考虑连续周期函数的 Fourier 展开. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 其 Fourier 展开的部分和记为 $S_n(x)$, 则 $S_n(x)$ 可以写为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du.$$

记

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x),$$

利用等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})u = \frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

可得

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+u)}{2\sin\frac{u}{2}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})udu \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}du.\end{aligned}$$

如果在上式中取 $f(x)=1$ 还可得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}du=1,$$

因此又有

$$\sigma_n(f)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u)-f(x)]\frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}du.$$

定理 10.5.1 (Fejér)**.** 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 则 $\sigma_n(f)$ 一致收敛于 f.

证明. 任给 $\varepsilon>0$, 由 f 的一致连续性知, 存在 $\delta>0$, 当 $|u|<\delta$ 时

$$|f(x+u)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

记 $M=\max|f(x)|$, 则当 $n>M\varepsilon^{-1}\sin^{-2}\frac{\delta}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x)-f(x)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+u)-f(x)|\frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}du\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|u|\leqslant\pi}|f(x+u)-f(x)|\frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}du\\&\leqslant\varepsilon\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}du+2M\frac{1}{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}<3\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明 $\sigma_n(f)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$. □

注. (1) 记

$$\mathcal{F}_n(u)=\frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\frac{nu}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}},$$

称为 Fejér 核, 上述定理的证明主要用到了如下性质:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(u)du=1,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|u|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(u)du=0,\quad \delta>0.$$

(2) 由此定理可以立即知道连续周期函数可以用三角多项式一致逼近.

(3) 由此定理还可推出, 连续周期函数的 Fourier 展开如果收敛, 则必收敛到自身. 这是因为, 如果级数收敛到 g, 则其部分和的平均值也收敛到 g, 因而 g 就是 f 自身. 考虑级数部分和平均值的收敛性的方法一般称为 Cesàro 求和法.

值得指出的是, 1873 年, du Bois-Reymond 构造了一个连续函数, 它的 Fourier 级数并非处处收敛. 研究 Fourier 级数的收敛性是分析学中重要而困难的问题.

§10.5.2 一致收敛性

先考虑单调函数的 Fourier 级数.

引理 10.5.2 (Dirichlet). 设 g 为 $[0,h]$ 上的单调函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h g(u)\frac{\sin\lambda u}{u}du=\frac{\pi}{2}g(0+0).$$

证明. 不妨设 g 单调递增, 则

$$\int_0^h g(u)\frac{\sin\lambda u}{u}du=\int_0^h[g(u)-g(0+0)]\frac{\sin\lambda u}{u}du+g(0+0)\int_0^h\frac{\sin\lambda u}{u}du,$$

当 $\lambda\to+\infty$ 时, 上式右边第二个积分趋于 $\frac{\pi}{2}g(0+0)$, 因此只要证明第一个积分趋于零即可.

任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<u\leqslant\delta$ 时 $0\leqslant g(u)-g(0+0)<\varepsilon$. 此时

$$\begin{aligned}\int_0^h[g(u)-g(0+0)]\frac{\sin\lambda u}{u}du&=\int_0^\delta[g(u)-g(0+0)]\frac{\sin\lambda u}{u}du\\&\quad+\int_\delta^h[g(u)-g(0+0)]\frac{\sin\lambda u}{u}du\\&=I_1+I_2,\end{aligned}$$

根据积分第二中值定理,

$$I_1=[g(\delta)-g(0+0)]\int_\xi^\delta\frac{\sin\lambda u}{u}du=[g(\delta)-g(0+0)]\int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin u}{u}du,$$

因此

$$|I_1|\leqslant 2L\varepsilon,$$

其中

$$\left|\int_0^x\frac{\sin u}{u}du\right|\leqslant L,\quad\forall\ x\geqslant 0.$$

根据 Riemann-Lebesgue 引理, 当 $\lambda\to+\infty$ 时 $I_2\to 0$, 这表明引理成立. □

根据这个引理可以立即得到下面的推论:

推论 10.5.3 (Dirichlet-Jordan). *设 $f(x)$ 为可积函数, 如果 $f(x)$ 在 x_0 附近的区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 上单调, 则其 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.*

从上面这一段讨论我们可以看出, 函数的单调性与 Fourier 级数的收敛性有很密切的关系. 下面的引理显示了单调性的重要作用.

引理 10.5.4. *设 $f(x)$ 为 $(-\pi,\pi)$ 上的单调有界函数, 则其 Fourier 系数 a_n, b_n 有如下估计*

$$|na_n|\leqslant\frac{1}{\pi}|f(\pi-0)-f(-\pi+0)|,\quad |nb_n|\leqslant\frac{2}{\pi}|f(\pi-0)-f(-\pi+0)|,\quad\forall\ n\geqslant 1.$$

证明. 不妨设 f 单调递增. 以 a_n 为例, 由积分第二中值公式, 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(-\pi+0)]\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}[f(\pi-0)-f(-\pi+0)]\int_{\xi}^{\pi}\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}[f(\pi-0)-f(-\pi+0)]\frac{-1}{n}\sin n\xi, \end{aligned}$$

由此可以立即得到所需估计. □

推论 10.5.5. 设 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的 *Lipschitz* 函数, 则存在常数 M 使得其 *Fourier* 系数 a_n, b_n 满足条件 $|na_n| \leqslant M$, $|nb_n| \leqslant M$, $\forall\ n \geqslant 1$.

证明. 设 $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$, 则

$$f(x) = Lx - (Lx - f(x)),$$

我们说明 $g(x) = Lx - f(x)$ 为单调递增函数. 事实上, 设 $y \geqslant x$, 则

$$g(y)-g(x) = L(y-x) - [f(y)-f(x)] \geqslant L(y-x) - |f(y)-f(x)| \geqslant 0.$$

因此 $f(x)$ 是两个单调递增函数之差, 根据前一引理即得欲证结论. □

下面的结果是一个 Tauber 型定理.

定理 10.5.6 (Hardy)**.** 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的部分和为 $S_n(x)$, 记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(x),$$

如果 $\sigma_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, 且 $\{nf_n(x)\}$ 一致有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 f.

证明. 由已知条件, 存在常数 M, 使得 $|nf_n(x)| < M$ 对任意 x 和 n 成立. 任给 $0 < \varepsilon < 1$, 存在 N_0, 当 $n \geqslant N_0$ 时

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon^2, \quad \forall\ x.$$

当 $m > n \geqslant N_0$ 时, 由

$$m\sigma_m(x) - n\sigma_n(x) = (m-n)S_m(x) - \sum_{k=n+2}^{m}(k-1-n)f_k(x)$$

得

$$m(\sigma_m(x)-f(x)) - n(\sigma_n(x)-f(x)) = (m-n)(S_m(x)-f(x)) - \sum_{k=n+2}^{m}(k-1-n)f_k(x),$$

我们有如下估计

$$
\begin{aligned}
|S_m(x)-f(x)| &\leqslant \frac{m}{m-n}|\sigma_m(x)-f(x)|+\frac{n}{m-n}|\sigma_n(x)-f(x)| \\
&\quad+\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+2}^{m}(k-1-n)|f_k(x)| \\
&\leqslant \frac{m+n}{m-n}\varepsilon^2+\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+2}^{m}(k-1-n)\frac{M}{k} \\
&\leqslant \frac{m+n}{m-n}\varepsilon^2+\frac{1}{m-n}\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{m-n-1}k \\
&\leqslant \frac{m+n}{m-n}\varepsilon^2+M\Big(\frac{m}{n}-1\Big).
\end{aligned}
$$

取 $N>\max\{6/\varepsilon,\ (1+2\varepsilon)N_0\}$, 则当 $m\geqslant N$ 时,

$$
\frac{m}{1+\varepsilon}-\frac{m}{1+2\varepsilon}=\frac{m\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)}>1,
$$

于是可取正整数 n, 使得

$$
\frac{m}{1+\varepsilon}>n>\frac{m}{1+2\varepsilon}>N_0,
$$

此时

$$
|S_m(x)-f(x)|\leqslant\frac{1+\varepsilon+1}{1+\varepsilon-1}\varepsilon^2+M(1+2\varepsilon-1)\leqslant(3+2M)\varepsilon,
$$

这说明 $S_m(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. □

利用前一小节连续函数的 Fourier 级数的平均一致收敛性, 以及上面关于单调函数 Fourier 系数的估计, 我们可立即得到如下推论:

定理 10.5.7. *设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 如果 $f(x)$ 可写为两个单调函数之差, 则其 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$ 自身. 特别地, 周期的 Lipschitz 函数的 Fourier 级数一致收敛于自身.*

注. 能写成两个单调递增函数之差的函数是所谓的有界变差函数, 参见第十四章及其附录.

§10.5.3 等周不等式

我们考虑 Parseval 恒等式的一个几何应用, 即考虑有名的等周问题: 设 γ 是一条长度为 L 的简单闭曲线, 它所围成的区域什么时候面积最大？为了简单起见, 我们假设 γ 是连续可微曲线.

定理 10.5.8 (等周不等式). *设平面区域 Ω 的边界 γ 是一条长度为 L 的连续可微简单闭曲线, 则 Ω 的面积 A 满足不等式*

$$
A\leqslant\frac{L^2}{4\pi},
$$

等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\dfrac{L}{2\pi}$ 的圆盘.

证明. 取 γ 的参数为弧长参数, 其参数方程为

$$\gamma(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in[0,L].$$

此时 $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=1$. 我们可进一步假设 γ 的重心位于原点, 即

$$\int_0^L x(t)dt=\int_0^L y(t)dt=0,$$

这是因为可以通过平移将重心移至原点, 而平移保持区域的面积和曲线的长度不变.

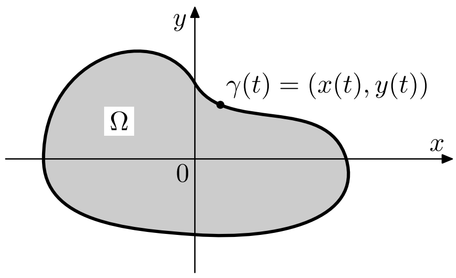


图 10.7 等周不等式

因为 γ 为闭曲线, $x(0)=x(L)$, $y(0)=y(L)$. 由下面的 Wirtinger 不等式得

$$\int_0^L x^2(t)dt\leqslant\Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2\int_0^L[x'(t)]^2dt,\quad \int_0^L y^2(t)dt\leqslant\Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2\int_0^L[y'(t)]^2dt.$$

利用面积公式

$$A=\frac{1}{2}\Big|\int_0^L[x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]dt\Big|$$

以及 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned}A^2&=\frac{1}{4}\Big[\int_0^L(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))dt\Big]^2\\&\leqslant\frac{1}{4}\int_0^L[x^2(t)+y^2(t)]dt\int_0^L[(x'(t))^2+(y'(t))^2]dt\\&\leqslant\frac{1}{4}\Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2\Big(\int_0^L[(x'(t))^2+(y'(t))^2]dt\Big)^2\\&=\frac{1}{4}\Big(\frac{L}{2\pi}\Big)^2L^2,\end{aligned}$$

即 $A\leqslant L^2/4\pi$, 等号成立的条件可由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Wirtinger 不等式等号成立的条件得到. $\square$

定理 10.5.9 (Wirtinger 不等式)**.** 设 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$. 如果

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=a\cos x + b\sin x$.

证明. 将 f 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 周期为 2π. 则 f 有 Fourier 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

$f'(x)$ 的 Fourier 展开为

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx).$$

根据 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\\ &\leqslant \pi\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n^2+n^2b_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2dx,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_n=b_n=0$, $\forall\ n\geqslant 2$. □

推论 10.5.10. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连可微函数, 且 $f(a)=f(b)$,

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

则

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2dx,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=c\cos\frac{2\pi}{b-a}x + d\sin\frac{2\pi}{b-a}x$.

证明. 利用线性变换 $x=\dfrac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a$ 将区间 $[a,b]$ 上的函数变为 $[-\pi,\pi]$ 上的函数, 应用 Wirtinger 不等式即可. □

推论 10.5.11 (Poincaré 不等式)**.** 设 $f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的连续可微函数, 且 $f(0)=f(\pi)=0$, 则

$$\int_0^\pi f^2(x)dx \leqslant \int_0^\pi [f'(x)]^2 dx,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=c\sin x$.

证明. 将 $f(x)$ 奇延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数, 再应用 Wirtinger 不等式即可. □

§10.5.4 Fourier 级数的复数表示

记 $i=\sqrt{-1}$, 则

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

特别地, $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$. 因此

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}),\quad \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx}).$$

利用这一点, 我们可以作如下计算:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}}\\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta}\frac{(-2i)\sin\frac{n+1}{2}\theta}{(-2i)\sin\frac{\theta}{2}}\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n}{2}\theta},\end{aligned}$$

这样就又一次得到了等式

$$\sum_{k=0}^n\cos k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n}{2}\theta=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}[\sin(n+\frac{1}{2})\theta+\sin\frac{\theta}{2}]$$

以及

$$\sum_{k=1}^n\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n}{2}\theta=\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}[\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta].$$

如果 $f(x)$ 有 Fourier 展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其展开可以写为复数形式

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\Big)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},
\end{aligned}$$

其中系数 c_n 具有统一的形式:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

现在考虑一个应用. 设 α 为无理数, 对于 $k=1,2,\cdots$, 无理数 $k\alpha$ 的小数部分记为 $\{k\alpha\}$, 这样就得到了 $(0,1)$ 中一列数

$$x_1=\{\alpha\},\ x_2=\{2\alpha\},\ \cdots,\ x_k=\{k\alpha\},\ \cdots.$$

我们要说明这一列数在区间 $(0,1)$ 中是一致均匀分布的. 为了明确这个问题, 任取 $a<b\in[0,1]$, 上述数列的前 n 项中属于区间 $[a,b)$ 的项个数记为 $\xi_n(a,b)$, 即如果 $\chi_{[a,b)}$ 是区间 $[a,b)$ 的特征函数, 则

$$\xi_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\chi_{[a,b)}(x_k).$$

我们要证明下列等式成立:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n(a,b)}{n}=b-a.$$

(1) 首先, 我们注意到等式 $e^{2\pi in\{k\alpha\}}=e^{2\pi ink\alpha}$. 因此, 当 m 为非零整数时,

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}e^{2\pi imx_k}\Big|=\Big|\sum_{k=0}^{n}e^{2\pi imk\alpha}\Big|\leqslant\frac{1}{|\sin\pi m\alpha|},$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi imx_k}=0,$$

进而说明对任意三角多项式 $P=a_0/2+\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k\cos 2\pi kx+b_k\sin 2\pi kx)$, 下式成立:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P(x_k)=\int_0^1P(x)dx.$$

(2) 下面的引理表明, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[0,1]$ 上的三角多项式 P_1,P_2, 使得

$$P_1\leqslant\chi_{[a,b)}\leqslant P_2,\quad \int_0^1(P_2-P_1)dx<\varepsilon.$$

根据 (1), 存在 N, 当 $n > N$ 时

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_i(x_k) - \int_0^1 P_i(x)dx\Big| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

此时有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_2(x_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_1(x_k) < 3\varepsilon.$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b)}(x_k) \in \Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_1(x_k),\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_2(x_k)\Big]$$

以及

$$\int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx \in \Big[\int_0^1 P_1(x)dx,\ \int_0^1 P_2(x)dx\Big],$$

于是, 当 $n > N$ 时 (用到第一章第二节习题),

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b)}(x_k) - \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_2(x_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_1(x_k)\Big] + \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 P_2(x)dx - \int_0^1 P_1(x)dx\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_1(x_k) - \int_0^1 P_1(x)dx\Big| + \frac{1}{2}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_2(x_k) - \int_0^1 P_2(x)dx\Big| \\
&\leqslant \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b)}(x_k) = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx = b - a.$$

特别地, $\{x_k\}$ 在 $(0,1)$ 中是稠密的. □

引理 10.5.12. *设 f 为 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在三角多项式 P_1, P_2, 使得 $P_1 \leqslant f \leqslant P_2$, 且*

$$\int_0^1 [P_2(x) - P_1(x)]dx < \varepsilon.$$

证明. 首先, 不难找到连续周期函数 f_1, f_2, 使得

$$f_1 \leqslant f \leqslant f_2, \quad \int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]dx < \varepsilon/2,$$

然后再利用 Weierstrass 逼近定理找到三角多项式 P_1, P_2, 使得

$$0 \leqslant f_1 - P_1 < \varepsilon/4,\ 0 \leqslant P_2 - f_2 < \varepsilon/4,$$

则 P_1, P_2 就是满足要求的三角多项式. □

§10.5.5 Fourier 积分初步

现在我们考虑这样的问题: 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数如何象周期函数那样作展开?

假定 f 满足适当的条件, 则在有限的区间 $[-l,l]$ 上, f 可展开为 Fourier 级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\big),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad(n=1,2,\cdots).$$

这说明

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt.$$

如果 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积, 令 $l\to+\infty$, 则求和应变成积分

$$f(x)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt\right]d\lambda,$$

因此, 在一定的条件下, 我们有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt\right]d\lambda,\tag{10.8}$$

或

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda,\tag{10.9}$$

其中

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda tdt,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda tdt.$$

(10.8) 和 (10.9) 称为 f 的 Fourier 积分公式, 其右端称为 Fourier 积分, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ 相当于 Fourier 系数.

当然, (10.8) 和 (10.9) 的推导只是形式推导. 和 Fourier 级数一样, 要建立 (10.8) 那样的等式, 必须仔细考虑收敛性. 下面我们只叙述一些相应的结果, 而把有些证明放到以后的课程中 (也可参考第十六章第四节).

引理 10.5.13. *如果 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积, 则 $a(\lambda),b(\lambda)$ 关于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 一致连续, 且 $\lambda\to\infty$ 时, $a(\lambda)\to0$, $b(\lambda)\to0$.*

证明. 由 f 的条件知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|dt + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt < \varepsilon.$$

记 $M = \int_{-A}^{A} |f(t)|dt + 1$, 由于 $\cos x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 故存在 $\eta > 0$, 使得 $|x' - x''| < \eta$ 时

$$|\cos x' - \cos x''| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

于是当 $|\lambda' - \lambda''| < \dfrac{\eta}{A}$ 时,

$$\begin{aligned}
|a(\lambda') - a(\lambda'')| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||\cos\lambda' t - \cos\lambda'' t|dt \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-A} 2|f(t)|dt + \frac{1}{\pi}\int_{A}^{+\infty} 2|f(t)|dt \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} |f(t)||\cos\lambda' t - \cos\lambda'' t|dt \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon + \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{M}\int_{-A}^{A} |f(t)|dt < \frac{3}{\pi}\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$

对 $g(\lambda)$ 有类似的证明. 同时, 我们有

$$\limsup_{\lambda\to\infty} |a(\lambda)| \leqslant \varepsilon + \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\Big|\int_{-A}^{A} f(t)\cos\lambda t\, dt\Big| = \varepsilon,$$

这说明 $a(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty)$. 同理, $b(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty)$. □

引理 10.5.14. 记

$$S(A, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x - t)dt,$$

f 条件同上, 则

$$S(A, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} [f(x + t) + f(x - t)]\frac{\sin At}{t}dt.$$

证明. 在第十六章中将考虑积分次序的可交换性问题, 现在我们先承认这一点, 此时

$$\begin{aligned}
S(A, x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x - t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t)\cos\lambda(x - t)d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(x - t)}{x - t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} [f(x + t) + f(x - t)]\frac{\sin At}{t}dt.
\end{aligned}$$

引理 10.5.15. 任给 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{\delta}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}dt = 0.$$

证明. 和引理 10.5.13 中 $a(\lambda)\to 0$ 的证明完全类似, 故略去. □

这个引理说明, $\lim\limits_{A\to+\infty} S(A,x)$ 只与 f 在 x 附近的性质有关. 因此, 与 Fourier 级数类似, 我们有 Dini 判别法, 这里只叙述一个特殊情形:

定理 10.5.16. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中可积且绝对可积, 如果 f 分段可导, 则

$$\begin{aligned}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt \\ &= \int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\cos\lambda x]d\lambda,\end{aligned}$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt.$$

关于 Fourier 积分的更多结果和应用请参见第十六章第四节.

第十一章　度量空间和连续映射

从这一章开始我们要研究多个变量的函数. 我们知道, 实数系的基本性质对于一元实函数的各种性质都有决定性的影响. 因此, 为了研究多个变量的函数, 我们要首先研究它们的定义域的基本性质. 本章就是讨论这些基本性质的, 为了今后进一步学习的需要, 我们讨论的内容比通常的欧氏空间还要稍稍一般一些.

§11.1　内积与度量

定义 11.1.1 (内积)**.** *设 X 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 如果映射*

$$\begin{aligned} g = \langle , \rangle : \quad & X \times X \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto g(x, y) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

满足以下条件

(1) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (正定性);

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall\ x, y \in X$ (对称性);

(3) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, $\forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ x, y, z \in X$ (线性性).

则称 $g = \langle , \rangle$ 为 X 上的一个内积, $(X, \langle , \rangle)$ 称为内积空间, $\langle x, y \rangle$ 称为 x 与 y 的内积, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 称为 x 的范数.

例 11.1.1. *$\mathbb{R}$ 上的内积.*

对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $\langle x, y \rangle = xy$, 则显然 $\langle , \rangle$ 为 $\mathbb{R}$ 上的内积. 此时, x 的范数就是其绝对值 $|x|$.

例 11.1.2. *$\mathbb{R}^n$ 上的内积.*

记 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ 为全体 n 元有序实数组, 以显然的方式, $\mathbb{R}^n$ 成为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 称为 n 维欧氏空间. $\mathbb{R}^n$ 上有标准的内积 $\langle , \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall\ x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

如果 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 则其范数为

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

例 11.1.3. *闭区间上连续函数空间的内积.*

记 $C^0[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体形成的向量空间. 定义内积 $\langle , \rangle$ 如下:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

其中, 内积的正定性需要用到连续性的条件: 非负连续函数的积分一定是非负实数, 且积分为零当且仅当被积函数为零. □

定理 11.1.1 (Schwarz 不等式)**.** *设 $(X, \langle , \rangle)$ 为内积空间, 则*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

且等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

证明. 当 $x = 0$(或 $y = 0$) 时, 由内积的线性知

$$\langle 0,\ y\rangle = \langle 0 \cdot 0,\ y\rangle = 0\langle 0,\ y\rangle = 0,$$

此时 Schwarz 不等式自然成立. 下设 $x \neq 0$, $y \neq 0$, 则对任意 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\langle x, x\rangle - 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x - ty, x - ty\rangle \geqslant 0,$$

上式是关于 t 的一元二次函数, 因此其判别式非正:

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0,$$

等号成立的条件留作练习. □

注. 如果不考虑等式成立的条件, 只要 $\langle , \rangle$ 具有非负性, 则 Schwarz 不等式仍然成立.

根据 Schwarz 不等式, 当 x, y 为非零向量时, 可以取 $\theta(x, y) \in [0, \pi]$, 使得

$$\cos\theta(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

$\theta(x, y)$ 称为 x, y 的夹角, 也记为 $\angle(x, y)$.

推论 11.1.2. *设 $(X, \langle , \rangle)$ 为内积空间, $x, y \in X$, 则*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

证明. 根据 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

因此欲证不等式成立. □

定义 11.1.2 (度量)**.** 设 X 为非空集合, 如果映射 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ 满足以下条件

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$. （三角不等式）

则称 ρ 为 X 上的一个度量（或距离）, (X,ρ) 称为度量空间（或距离空间）, $\rho(x,y)$ 称为 x,y 之间的距离.

例 11.1.4. $\mathbb{R}$ 上的度量.

任给 $x,y\in\mathbb{R}$, 令 $\rho(x,y)=|x-y|$, 则 ρ 为 $\mathbb{R}$ 上的度量.

例 11.1.5 (内积诱导距离)**.** 设 $(X,\langle,\rangle)$ 为内积空间, 则令

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,\quad\forall\, x,y\in X.$$

显然 ρ 满足度量定义中的条件 (1), (2), 而三角不等式也成立:

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\\&\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

因此 ρ 为 X 上的度量, 称为由内积诱导的度量. □

例 11.1.6. 离散度量空间.

度量空间比内积空间要广泛得多, 它们不一定为向量空间. 例如, 设 X 为任意非空集合, 定义映射 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 如下:

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

不难验证 d 为 X 上的一个度量, 称为离散度量. □

习题 11.1

1. 记

$$l^2=\Big\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\,\Big|\,x_n\in\mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\Big\}.$$

在 l^2 中定义自然的加法和数乘使之成为向量空间, 并且说明下面定义的映射 $\langle,\rangle$ 为 l^2 上的内积:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n.$$

2. 记 $R[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数的全体. 设 $f,g\in R[a,b]$, 定义

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

问: $\langle,\rangle$ 是内积吗? (提示: 考察正定性.)

3. 设 $\langle,\rangle$ 为向量空间 X 上的内积, $x,y\in X$, $y\neq 0$. 在下面的不等式

$$\langle x-ty,x-ty\rangle\geqslant 0$$

中代入 $t=\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ 从而证明 Schwarz 不等式.

4. 求推论 11.1.2 中等号成立的条件.

5. 证明内积空间 X 满足如下的平行四边形公式:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \forall\ x,\ y\in X.$$

6. 对于连续函数的空间 $C^0[a,b]$，如下定义映射

$$d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|,\quad \forall\ f,\ g\in C^0[a,b].$$

证明 d 是 $C^0[a,b]$ 上的一个度量, 称为最大模度量.

7. 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$d_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i,-y_i|,\quad d_2(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|,$$

证明 d_1 和 d_2 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.

8. 设 A 为度量空间 (X,ρ) 的子集, 在 $A\times A$ 上定义如下映射 ρ_A:

$$\rho_A(a_1,a_2)=\rho(a_1,a_2),$$

证明 ρ_A 为 A 上的度量, 称为诱导度量, (A,ρ_A) 称为 X 的子度量空间.

9. 证明, 如果 ρ 为 X 上的度量, 则 $\dfrac{\rho}{1+\rho}$ 也是 X 上的度量.

10. $(*)$ 设 $f(0)=0$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为保持欧氏距离的映射, 即

$$\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|,\quad \forall\ x,\ y\in\mathbb{R}^n,$$

证明 f 为正交线性变换.

§11.2 度量空间的拓扑

本节假设 (X,ρ) 为度量空间. 设 $x\in X$, $r>0$, 记

$$B_r(x)=\{y\in X\mid \rho(y,x)<r\},$$

称为以 x 为中心, r 为半径的开球.

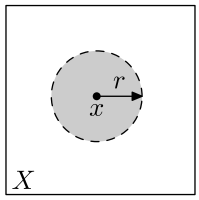


图 11.1 开球

例 11.2.1. 欧氏空间中的开球.

在 $\mathbb{R}$ 中, 以 x_0 为中心, r 为半径的开球就是开区间 (x_0-r,x_0+r). 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 以 (x_0,y_0) 为中心, 以 r 为半径的开球实际上是圆盘

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}.$$

在一般的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 以 $(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 为中心, r 为半径的开球是

$$\{(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n\mid (x^1-x_0^1)^2+\cdots+(x^n-x_0^n)^2<r^2\}.$$

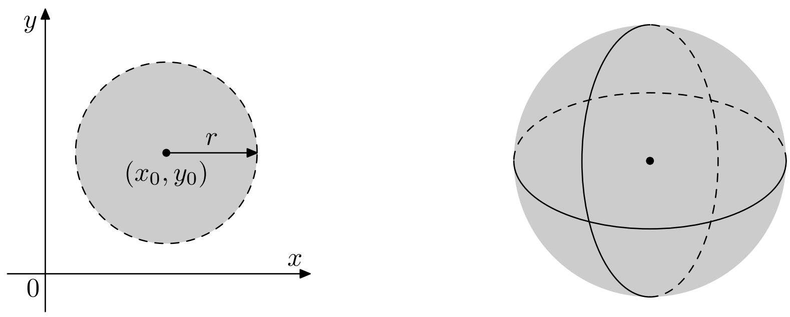


图 11.2 圆盘和欧氏球

例 11.2.2. 离散度量空间中的开球.

设 X 是离散度量空间. 由于 X 中的距离只取 0 或 1, 因此

$$B_r(x)=\{x\},\quad \forall\, r\leqslant 1;\quad B_r(x)=X,\quad \forall\, r>1.$$

我们注意到离散度量空间中的开球看上去和欧氏空间中的很不一样.

定义 11.2.1 (开集和闭集). 设 U 为 X 的子集, 如果任给 $x \in U$, 均存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(x) \subset U$, 则称 U 为开集; 约定空集也是开集. 如果一个集合的补集（余集）是开集, 则称该集合为闭集.

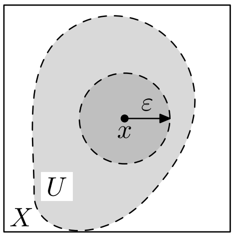


图 11.3 开集

显然, X 为开集, 从而空集也是闭集. 含有 x 的开集称为 x 的开邻域.

例 11.2.3. 欧氏空间中的一些开集和闭集.

开区间 (a,b), $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的开集; 闭区间 $[a,b]$ 以及区间 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b]$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

上半平面 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集, 闭的圆盘 $\{x^2+y^2 \leqslant r^2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

一般地, 一个子集可能既不是开集, 也不是闭集, 比如 $\mathbb{R}$ 中的半开半闭区间 $[a,b)$. 不过, 离散度量空间的情形却很特殊.

例 11.2.4. 离散度量空间中的开集和闭集.

因为以 x 为中心, 以 $1/2$ 为半径的开球就是 $\{x\}$, 因此离散度量空间的任何子集都是开集, 从而任何子集也都是闭集.

例 11.2.5. 度量空间中的开球为开集.

设 $x \in B_r(x_0)$, 则 $\rho(x,x_0) < r$. 令 $\varepsilon = r - \rho(x,x_0)$, 则当 $y \in B_\varepsilon(x)$ 时, 由三角不等式, 有

$$\rho(y,x_0) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,x_0) < \varepsilon + \rho(x,x_0) = r,$$

这说明 $y \in B_r(x_0)$, 即 $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$, 因此 $B_r(x_0)$ 是开集.

类似地可证 $\{y \in X \mid \rho(y,x_0) > r\}$ 为开集, 其补集称为闭球, 是闭集. □

下面的命题反映了开集和闭集的基本性质.

命题 11.2.1. (1) 有限多个开集之交仍为开集; 任意多个开集之并仍为开集;

(2) 有限多个闭集之并仍为闭集; 任意多个闭集之交仍为闭集.

证明. (1) 设 $U_1,\cdots,U_k$ 为开集, 任给 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, 由定义, 存在 $\varepsilon_i > 0$, 使得 $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, $i=1,\cdots,k$. 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i | i=1,\cdots,k\}$, 则 $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, 故 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ 为开集, 从开集的定义立即可以推出任意多个开集之并仍为开集.

(2) 利用集合的运算

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c$$
$$(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c$$

及 (1) 即可. □

为了刻画闭集, 我们引入极限的概念, 它是实数中数列极限概念的推广.

定义 11.2.2 (极限). 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 X 中的点列, 如果存在 $x_0 \in X$, 使得任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$, 则称 $\{x_n\}$ 收敛到极限 x_0, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad 或 \quad x_n \to x_0 \ (n \to \infty).$$

注. (1) $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ 可改写为 $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

(2) 由三角不等式和 (1) 易见, 极限如果存在, 则必惟一.

极限也可以用开集来描述, 它的好处是可以不涉及度量, 从而便于推广到更一般的空间中.

命题 11.2.2. 设 $\{x_n\}$ 为度量空间 (X, ρ) 中的点列, 则 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 当且仅当任给 x_0 的开邻域 U, 存在 N, 当 $n > N$ 时 $x_n \in U$.

证明. (必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, U 是 x_0 的一个开邻域. 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. 根据极限的定义, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时

$$x_n \in B_\varepsilon(x_0) \subset U.$$

(充分性) 取 U 为开球即可. □

命题 11.2.3. 集合 A 为闭集当且仅当 A 中任何收敛点列的极限仍在 A 中.

证明. 设 A 为闭集, $\{x_n\} \subset A$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 如果 $x_0 \notin A$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset A^c$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 意味着, 存在 $N = N(\varepsilon_0)$ 使得 $n > N$ 时 $x_n \in B_{\varepsilon_0}(x_0)$, 这与 $x_n \in A$ 相矛盾! 因此 $x_0 \in A$.

反之, 如果 A 中任何收敛点列的极限仍在 A 中, 则任取 $x_0 \notin A$, 我们说明存在 $n_0 > 0$ 使得 $B_{1/n_0}(x_0) \subset A^c$, 即 A^c 为开集. (反证法) 如果不然, 则对任意 $n \geqslant 1$, 均有 $B_{1/n}(x_0) \cap A \neq \varnothing$. 取 $x_n \in B_{1/n}(x_0) \cap A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 这导出了矛盾. □

注. 这个命题可以用来解释闭集的属性: 闭集关于求极限运算是封闭的.

定义 11.2.3 (内点, 外点, 边界点)**.** 设 A 为度量空间 X 的子集, $x_0 \in X$. 如果存在 x_0 的开邻域 U, 使得 $U \subset A$, 则称 x_0 为 A 的内点, 内点的全体记为 $\mathrm{int}A$ 或 $\mathring{A}$, 称为 A 的内部; 如果存在 x_0 的开邻域 U, 使得 $U \subset A^c$, 则称 x_0 为 A 的外点; 如果 x_0 的任意开邻域中都既有 A 中的点, 也有不属于 A 中的点, 则称 x_0 为 A 的边界点, 边界点的全体记为 ∂A, 称为 A 的边界.

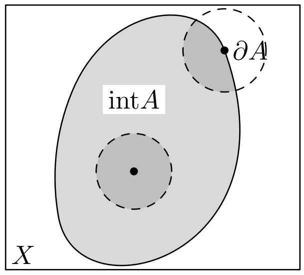


图 11.4 内部和边界

从定义不难看出, 内点集 $\mathring{A}$ 是包含于 A 的 “最大” 开集, A 的外点就是 A^c 的内点, 空间 X 可分解为

$$X = \mathrm{int}A \cup \partial A \cup \mathrm{int}(A^c),$$

这个分解中的三个子集互不相交. 由此可得如下性质:

- ∂A 为闭集, 这是因为 $\partial A = (\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}(A^c))^c$.
- $\mathrm{int}A \cup \partial A$ 也是闭集, 记为 $\bar{A}$, 称为 A 的闭包. 闭包是闭集是因为 $\bar{A} = (\mathrm{int}(A^c))^c$. 此外, $\bar{A} = A \cup \partial A$ 也成立. 这是因为, 按定义显然有 $\bar{A} \subset A \cup \partial A$. 其次, 如果 $a \in A \cup \partial A$, 则 $a \in A$ 或 $a \in \partial A$, 总之 a 不是 A 的外点, 因此 $a \in \bar{A}$, 即 $A \cup \partial A \subset \bar{A}$ 也成立.
- A 为闭集当且仅当 $\partial A \subset A$, 即 $A = \bar{A}$. 根据前一条性质, 只要证明必要性就可以了. 事实上, 如果 A 是闭集, 则 A^c 为开集, 从而 A^c 就是 A 的全体外点, 于是
$$\bar{A} = (\mathrm{int}(A^c))^c = (A^c)^c = A.$$
- 当 $A \subset B$ 时, $\bar{A} \subset \bar{B}$. 这是因为, 此时 $A^c \supset B^c$, $\mathrm{int}(A^c) \supset \mathrm{int}(B^c)$, 从而 $\bar{A} \subset \bar{B}$ 成立.

在第十三章中考虑多元积分时, 我们将要用到闭包和边界的上述性质.

例 11.2.6. 作为 $\mathbb{R}$ 的子集, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ 既无内点, 也无外点. 因此 $\mathbb{Q}$ 的边界点为整个空间 $\mathbb{R}$.

例 11.2.7. 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中开球的边界.

设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. 由于 $\{\|x - x_0\| < r\}$ 和 $\{\|x - x_0\| > r\}$ 均为开集, 故

$$\partial B_r(x_0) = \{|x - x_0| = r\},$$

这个边界称为 $n-1$ 维球面 (以 x_0 为中心, r 为半径). □

习题 11.2

1. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $r>0$. 令

$$I_r^n(a)=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,\big|\,|x_i-a_i|\leqslant r,\ 1\leqslant i\leqslant n\},$$

称为 n 维正方体. 证明正方体都是闭集. 把上式中第一个 $\leqslant$ 换成 $<$ 得到的集合称为开立方体, 证明它们的确是开集.

2. 证明度量空间中的有限点集以及闭球 $\bar{B}_r(x)=\{y\in X\,|\,\rho(y,x)\leqslant r\}$ 为闭集.

3. 在 $\mathbb{R}$ 中举例说明, 无限个闭集的并集可能不是闭集, 无限个开集的交集可能不是开集.

4. 设 X 是度量空间 Y 的子度量空间. 证明, $A\subset X$ 为 X 中的开集当且仅当存在 Y 中的开集 U, 使得 $A=X\cap U$; 类似地, B 为 X 中闭集当且仅当存在 Y 中闭集 V, 使得 $B=X\cap V$.

5. 有理数 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子度量空间. 证明, $(-\pi,\pi)\cap\mathbb{Q}$ 既是 $\mathbb{Q}$ 中的开集, 也是 $\mathbb{Q}$ 中的闭集.

6. 证明, 如果度量空间中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则其极限是惟一的.

7. 求下列子集的内点, 外点以及边界点:

$$(1)\ \{\frac{1}{n}\,\big|\,n=1,2,\cdots\}\subset\mathbb{R};\quad (2)\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\big|\,|x|+|y|\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^2.$$

8. 证明, 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 半径为 r 的开球的闭包就是半径为 r 的闭球. 在一般的度量空间中, 同样的事实还成立吗?

9. 设 $A\subset B$, 则 $\mathring{A}\subset\mathring{B}$.

10. 设 $A=\{x_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$. 证明, 当 $x_0\in\bar{A}-A$ 时, A 中存在子列收敛到 x_0.

11. 证明 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\,|\,x,\ y\in\mathbb{Q}\}$ 是稠密的 (A 为 X 的稠密子集是指 $\bar{A}=X$).

12. (*) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为闭区间上的有界函数, 它的图像 $\mathrm{graph}(f)$ 定义为

$$\mathrm{graph}(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2\,|\,x\in[a,b]\}.$$

证明, f 为连续函数当且仅当 $\mathrm{graph}(f)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

§11.3 度量空间的完备性

本节设 (X,ρ) 为度量空间. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中点列. 如果任给 $\varepsilon>0$, 均存在 $N=N(\varepsilon)$, 当 $m,n\geqslant N$ 时

$$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 (或基本列).

定义 11.3.1 (完备性)**.** *如果 X 中 Cauchy 列均为收敛点列, 则称 (X,ρ) 为完备度量空间.*

注. (1) 收敛点列必为 Cauchy 列;

(2) Cauchy 列如果有收敛子列, 则其本身也一定收敛 (习题).

例 11.3.1. *实数 $\mathbb{R}$ 在通常的度量下是完备的度量空间.*

$\mathbb{R}$ 的完备性是实数系的基本性质之一. 我们注意到, 有理数 $\mathbb{Q}$ 作为子度量空间不是完备的, 因为数列

$$a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

组成了 $\mathbb{Q}$ 中的基本列, 但它在 $\mathbb{Q}$ 中不收敛. 从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 的扩充可以看成是将 $\mathbb{Q}$ 进行某种 "完备化", 分析学就建立在这种完备化的基础上. 下面的命题给出了我们在 $\mathbb{R}^n$ 中做微积分的基础.

命题 11.3.1. *$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ 为完备度量空间.*

证明. 设 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中点列, 把它写成分量形式

$$x_m=(x_m^1,x_m^2,\cdots,x_m^n),$$

则对任意 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 有

$$|x_k^i-x_l^i|\leqslant\Big[\sum_{j=1}^{n}(x_k^j-x_l^j)^2\Big]^{\frac{1}{2}}=\|x_k-x_l\|,$$

因此, 如果 $\{x_m\}$ 为 Cauchy 列, 则 $\{x_m^i\}_{m=1}^{\infty}$ 对每个 $i=1,2,\cdots,n$ 均为 Cauchy 列, 从而收敛. 设 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m^i=x_0^i$, 记 $x_0=(x_0^1,x_0^2,\cdots,x_0^n)$, 则由

$$\|x_m-x_0\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|x_m^i-x_0^i\|$$

得

$$\lim_{m\to\infty}x_m=x_0.$$

这就证明了命题. □

设 A 为 X 中子集, 称 $\sup\{\rho(x,y)\,|\,x,y\in A\}$ 为 A 的直径, 记为 $\mathrm{diam}A$ 或 $d(A)$. 直径有限的集合称为有界集合.

例 11.3.2. 开球和闭球的直径.

$\mathbb{R}$ 中区间 $[a,b]$ 的直径为 $b-a$, 即直径就是区间长度; 一般地, $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的开球 (闭球) 直径为 $2r$. 对于一般的度量空间来说, 根据三角不等式易见, 半径为 r 的开球 (闭球), 其直径不超过 $2r$. 和 $\mathbb{R}^n$ 不同的是, 这时等号可能不成立. 例如, 在离散度量空间中, 半径为 $1/2$ 的开球, 其直径为 0.

下面的定理是 $\mathbb{R}$ 中闭区间套原理的一般形式.

定理 11.3.2. 设 (X,ρ) 为度量空间, 则下列几条等价:

(1) (X,ρ) 为完备度量空间;

(2) (Cantor) 闭集套原理成立: 若 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$ 为一列非空闭集, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{diam}F_n=0$, 则存在惟一的点 $a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$.

(3) 闭球套原理成立: (2) 中 F_n 换成直径或半径趋于 0 的闭球时结论不变.

证明. (1)$\Longrightarrow$(2): 取 $a_n\in F_n$, 由 $F_n\supset F_{n+1}\supset\cdots$ 知 $\{a_n,a_{n+1},\cdots\}\subset F_n$. 因此, $m>n$ 时

$$\rho(a_m,a_n)\leqslant \mathrm{diam}F_n\to 0\ \ (n\to\infty),$$

从而 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列, 设其极限为 a, 由 F_n 为闭集得

$$a=\lim_{m\to\infty}a_m\in F_n,\quad \forall\ n\geqslant 1,$$

即 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. 如果另有 $b\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则

$$\rho(a,b)\leqslant \mathrm{diam}F_n\to 0\ \ (n\to\infty),$$

从而 $a=b$.

(2)$\Longrightarrow$(3): 这是显然的.

(3)$\Longrightarrow$(1): $(*)$ 设 $\{a_n\}$ 为 X 中 Cauchy 列, 为了证明这是一个收敛点列, 只须证明它包含一个收敛子列即可. 由 Cauchy 列的定义, 存在 $n_1<n_2<\cdots$, 使得 $m,n\geqslant n_k$ 时

$$\rho(a_m,a_n)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

考虑 X 中的闭球 $F_k=\bar{B}_{2^{-k}}(a_{n_k}),k=1,2,\cdots$. 当 $x\in F_{k+1}$ 时,

$$\begin{aligned}\rho(x,a_{n_k})&\leqslant\rho(x,a_{n_{k+1}})+\rho(a_{n_{k+1}},a_{n_k})\\&\leqslant\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

这说明 $x \in F_k$. 即 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset F_{k+1} \supset \cdots$. 另一方面,

$$\operatorname{diam} F_k \leqslant 2 \cdot 2^{-k} \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

由闭球套原理, 存在 $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. 此时

$$0 \leqslant \rho(a, a_{n_k}) \leqslant 2^{-k} \to 0 \quad (k \to +\infty),$$

即子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 a. □

由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备度量空间, 因此闭集套原理在 $\mathbb{R}^n$ 中成立. 完备度量空间还有如下有用的压缩映像原理, 在下一章中我们将用它来研究多元反函数定理.

定义 11.3.2 (压缩映射)**.** 设 A 为 X 的子集, 映射 $f: A \to A$ 如果满足以下条件:

(∗) 存在常数 $0 \leqslant q < 1$, 使得 $\rho(f(a_1), f(a_2)) \leqslant q \cdot \rho(a_1, a_2), \quad \forall\, a_1, a_2 \in A$.

则称之为压缩映射.

定理 11.3.3 (压缩映像原理)**.** 设 A 为完备度量空间 X 中的闭集, $f: A \to A$ 为压缩映射, 则存在惟一的点 $a \in A$, 使得 $f(a) = a$ (不动点).

证明. 任取 $a_0 \in A$, 递归地定义 A 中点列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

则

$$\rho(a_{n+1}, a_n) = \rho\left(f(a_n), f(a_{n-1})\right) \leqslant q \cdot \rho(a_n, a_{n-1}), \quad \forall\, n \geqslant 1.$$

从而有

$$\begin{aligned}
\rho(a_{n+1}, a_n) &\leqslant q \cdot \rho(a_n, a_{n-1}) \leqslant q^2 \cdot \rho(a_{n-1}, a_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant q^n \cdot \rho(a_1, a_0), \\
\rho(a_m, a_n) &\leqslant \rho(a_m, a_{m-1}) + \rho(a_{m-1}, a_{m-2}) + \cdots + \rho(a_{n+1}, a_n) \\
&\leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n) \cdot \rho(a_1, a_0) \\
&\leqslant \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(a_1, a_0) \to 0, \ (m > n, \ n \to \infty).
\end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列. 设其极限为 a, 则 $a \in A$. 由三角不等式得

$$\begin{aligned}
\rho(f(a), a) &\leqslant \rho(f(a), f(a_n)) + \rho(f(a_n), f(a_{n-1})) + \rho(a_n, a) \\
&\leqslant q \cdot \rho(a, a_n) + q^{n-1} \cdot \rho(a_1, a_0) + \rho(a_n, a) \to 0 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

这说明 $f(a) = a$.

惟一性: 若 $f(b)=b$, 则

$$\rho(a,b)=\rho(f(a),f(b))\leqslant q\cdot\rho(a,b),$$

这说明 $\rho(a,b)=0$, 从而 $a=b$. □

例 11.3.3. $(*)$ 压缩映像原理的一个应用.

考虑连续函数的空间 $C^0[0,1]$, 这个空间上有最大模度量:

$$\rho(f,g)=\max_{[0,1]}|f(x)-g(x)|,$$

则 $(C^0[0,1],\rho)$ 是完备度量空间. 令

$$A=\{f\in C^0[0,1]\mid f(0)=0,\ f(1)=1\},$$

则 A 为 $(C^0[0,1],\rho)$ 中的闭集. 考虑映射

$$\begin{aligned}\phi: A &\to A,\\ f &\mapsto \phi(f),\end{aligned}$$

其中 $\phi(f)$ 是如下定义的连续函数:

$$\phi(f)(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}f(3x), & x\in[0,\frac{1}{3}],\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}f(2-3x), & x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}f(3x-2), & x\in[\frac{2}{3},1].\end{cases}$$

不难看出 ϕ 为压缩映射, 因此存在惟一的不动点 h, 即 h 为连续函数, 满足条件 $h(0)=0$, $h(1)=1$, 且 $\phi(h)=h$. h 具有一种自相似性, 可以证明, 这是一个无处可微的连续函数. □

下面的 Baire 纲定理也是 $\mathbb{R}$ 上的 Baire 定理的一般形式, 它们的证明完全类似, 都是用闭集套原理, 我们留作习题.

定理 11.3.4 (Baire)**.** *设 A_n $(n\geqslant 1)$ 为完备度量空间 X 中的一列闭集. 如果每个 A_n 都没有内点, 则它们的并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 也没有内点.*

习题 11.3

1. 证明 Cauchy 点列如果有收敛子列, 则其自身也是收敛的.
2. $(*)$ 证明 l^2 是完备的度量空间.
3. 证明 $C^0[a,b]$ 在最大模度量之下是一个完备的度量空间. (提示: 跟一致收敛的概念联系起来.)

4. (*) 举例说明, $C^0[a,b]$ 在内积诱导的度量下不是完备的.

5. 记 $D[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上可导且导数有界的函数全体组成的向量空间. 设 $f,g\in D[a,b]$, 令
$$d(f,g)=\max_{[a,b]}|f(x)-g(x)|+\sup_{[a,b]}|f'(x)-g'(x)|,$$
证明 $(D[a,b],d)$ 为完备度量空间.

6. 证明, A 为度量空间 X 中的有界集合当且仅当 A 包含于某个闭球之内.

7. 写出完备度量空间中的 Baire 纲定理的完整证明.

8. 设 A 为度量空间 X 的子集. 如果 $\bar{A}=X$, 则称 A 为 X 的稠密子集, 或称 A 在 X 中稠密. 证明, 在完备度量空间中, 可数多个稠密开集的交集仍然是稠密子集. (提示: 考虑补集, 用 Baire 纲定理.)

9. (*) 证明线性空间 l^2 不是可数维的, 即不存在可数个非零向量 $\{e_n\}\subset l^2$, 使得 l^2 中任何一点均为 $\{e_n\}$ 中有限个元素的线性组合. (提示: 考虑有限维子向量空间的并, 用 Baire 纲定理.)

10. (*) 证明, $\mathbb{R}^n$ 中的开球不能写成若干个互不相交的闭球的并.

§11.4 度量空间与紧致性

设 S 为度量空间 (X,ρ) 的子集, 如果 $S\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$, 则称 $\{G_\alpha\}$ 为 S 的一个覆盖. 当 G_α 均为开集时, 称 $\{G_\alpha\}$ 为开覆盖; 只有有限个 G_α 的覆盖称为有限覆盖, 由 $\{G_\alpha\}$ 中的一部分所组成的覆盖称为子覆盖.

例 11.4.1. *设 $x_0\in X$. 任取 $y\neq x_0$, 因为 $\rho(y,x_0)>0$, 故存在 $n\geqslant 1$, 使得 $\rho(y,x_0)>\frac{1}{n}$. 即 $y\in\{x\in X\,|\,\rho(x,x_0)>\frac{1}{n}\}$. 这说明*
$$X-\{x_0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X\,|\,\rho(x,x_0)>\frac{1}{n}\},$$
这就得到了 $X-\{x_0\}$ 的一个开覆盖.

定义 11.4.1 (紧致性)**.** *如果集合 S 的任何开覆盖都有有限子覆盖, 则称 S 为紧致集合.*

根据实数系的基本性质, 闭区间 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧致集合. 紧致性是一个较难理解的概念, 我们将它和有界性以及闭集的概念联系起来看.

命题 11.4.1. *紧致集合必为有界闭集.*

证明. 设 A 为紧致集合. 先证 A 有界. 任取 $a \in A$, 因为

$$A \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a),$$

由 A 的紧致性知, 存在 $n_1, \cdots, n_k$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{n_i}(a) = B_N(a),$$

其中 $N = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$. 这说明 A 有界.

再证 A 是闭集. 任取 $b \in A^c$, 因为

$$A \subset X - \{b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \,|\, \rho(x, b) > \frac{1}{n}\},$$

利用 A 的紧致性, 同理可得 N, 使得

$$A \subset \{x \in X \,|\, \rho(x, b) > \frac{1}{N}\},$$

这说明 $B_{1/N}(b) \subset A^c$, 因此 A^c 为开集, 即 A 为闭集. □

命题 11.4.2. 设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中子集, 则以下几条等价:

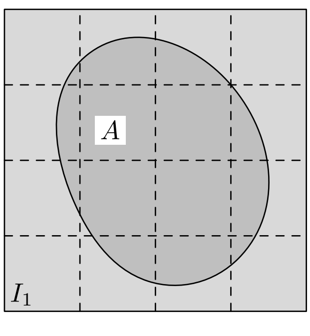
(1) A 为紧致集合;

(2) A 为序列紧致集合, 即 A 中任何无限点列均有收敛子列, 且该子列极限仍在 A 中;

(3) A 为有界闭集.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2). (反证法). 设 $\{b_n\}$ 为 A 中点列, 且它无收敛于 A 中点的子列. 根据命题 11.2.3 的证明, 对任意 $a \in A$, 存在开球 $B_{r(a)}(a)$, 使得 $B_{r(a)}(a)$ 最多只含有 $\{b_n\}$ 中有限项. 显然, $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_{r(a)}(a)$, 由紧致性, 存在 $a_1, \cdots, a_k$ 使得 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_{r(a_i)}(a_i)$, 特别地, $\{b_n\}$ 中只有有限项能出现在 A 中, 这就导出了矛盾!

(2) $\Longrightarrow$ (3). 先证 A 有界, (反证法). 如果存在 $a_n \in A$, 使得 $\rho(a_0, a_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, 则显然 $\{a_n\}$ 中无收敛子列, 这与假设相矛盾. 再证 A 为闭集, 仍用反证法. 根据命题 11.2.3, 此时存在 $a_n \in A$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \notin A$. $\{a_n\}$ 的一切子列均收敛于 $a \notin A$, 这与 A 序列紧相矛盾!



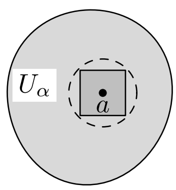


图 11.5 正方体的等分

(3) $\Longrightarrow$ (1) (反证法). 设 A 为有界闭集, 且存在 A 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使得任何有限个 U_α 均无法覆盖 A. 取闭正方体 $I_1 \supset A$, 将 I_1 做 2^n 等分, 必有一等分 $I_2 \subset I_1$, 使得 $I_2 \cap A$ 不能被有限个 U_α 覆盖. 依此类推, 得一串闭立方体 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, $\operatorname{diam} I_m \to 0$ $(m \to \infty)$. 由闭集套原理, 存在惟一的点 $a \in I_m \cap A$, $\forall\, m \geqslant 1$. 又因为 $\{U_\alpha\}$ 为 A 的开覆盖, 故存在 α_0 使得 $a \in U_{\alpha_0}$. 于是 m 充分大时必有 $I_m \subset U_{\alpha_0}$. 这与 $I_m \cap A$ 不能被有限个 U_α 覆盖相矛盾! □

注. 只有在证明的第三步才用到 $\mathbb{R}^n$ 的性质, 特别地, 度量空间中的紧致集合一定是序列紧致的; 反之, 可以证明, 在度量空间中, 序列紧致的集合必定是紧致的, 参见本节习题.

推论 11.4.3. *$\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列.*

证明. 这是因为有界点列必然包含在某个闭球中, 而根据上述定理, 闭球是紧致集合, 因而也是序列紧致的, 特别地, 该点列存在收敛子列. □

下面的 Lebesgue 数引理是 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 数引理的推广.

引理 11.4.4 (Lebesgue)**.** *设 A 为度量空间 X 中的紧致集合, $\{U_\alpha\}$ 为 A 的开覆盖. 则存在 $\lambda > 0$, 使得只要 A 的子集 B 满足 $\operatorname{diam}(B) < \lambda$, 则 B 必定包含在某个 U_α 中.*

证明. (反证法) 设满足要求的 λ 不存在, 则对任意 $n \geqslant 1$, 存在 A 的子集 B_n, 使得 B_n 的直径小于 $1/n$, 且 B_n 不包含于任何 U_α 内. 取 $b_n \in B_n$, 则得到 A 中的点列 $\{b_n\}$. 不论 $\{b_n\}$ 是不是有限子集, 由 A 的紧致性以及前一命题可知 $\{b_n\}$ 存在收敛子列, 不妨设 $\{b_n\}$ 本身收敛于 $b_0 \in A$. 因为 $\{U_\alpha\}$ 是 A 的开覆盖, 故存在 α_0, 使得 $b_0 \in U_{\alpha_0}$. 因为 U_{α_0} 为开集, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$B_\delta(b_0) \subset U_{\alpha_0},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$, 故可取 $n > 2/\delta$, 使得 $\rho(b_n, b_0) < \delta/2$, 此时

$$\rho(b, b_0) \leqslant \rho(b, b_n) + \rho(b_n, b_0) \leqslant \operatorname{diam}(B_n) + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \forall\, b \in B_n.$$

这说明 $B_n \subset B_\delta(b_0) \subset U_{\alpha_0}$, 这与 B_n 的选取相矛盾. □

注. 引理中的 λ 称为关于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数. 从证明可以看出 Lebesgue 数引理对序列紧致的集合也成立

习题 11.4

1. 证明, 有限个紧致集合的交集和并集仍为紧致集合.

2. 设 A 为紧致集合, $B \subset A$ 为闭子集, 则 B 也是紧致集合.

3. 设 X 是紧致度量空间, 证明 X 也是完备的.

4. 举例说明一般度量空间中的有界闭集未必为紧致集合 (提示: 离散度量空间).

5. $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的紧致集合吗？说明你的理由.

6. 在 $C^0[a,b]$ 中取最大模度量, 判断下面子集 A 的紧致性
$$A = \big\{ f \in C^0[a,b] \,\big|\, |f(x)| \leqslant 1, \ \ \forall\, x \in [a,b] \big\}.$$

7. 证明度量空间中的 Lebesgue 数引理对序列紧致的集合也成立.

8. 设 X 为紧致度量空间, $\{A_\alpha\}$ 为 X 中一族闭集. 如果 $\{A_\alpha\}$ 中的任何有限个闭集的交集均非空, 则 $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ 也不是空集. (提示: 考虑补集.)

9. $(*)$ 设 A 为度量空间 X 中序列紧致的集合, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在有限个半径为 ε 的开球覆盖 A.

10. $(*)$ 利用上题以及 Lebesgue 数引理证明, 度量空间中的集合是紧致的当且仅当它是序列紧致的.

§11.5 连续映射

§11.5.1 连续映射及其基本性质

回忆一下连续函数的定义: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 x_0 处连续是指, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 用度量空间的语言可作如下推广:

定义 11.5.1 (连续映射)**.** *设 $f: X \to Y$ 为度量空间 (X, ρ_1), (Y, ρ_2) 之间的映射, 设 $x_0 \in X$. 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $f(B^X_\delta(x_0)) \subset B^Y_\varepsilon(f(x_0))$, 则称 f 在 x_0 处连续. 如果 f 处处连续, 则称 f 为连续映射. 当 $Y = \mathbb{R}$ 时, 连续映射也称为连续函数.*

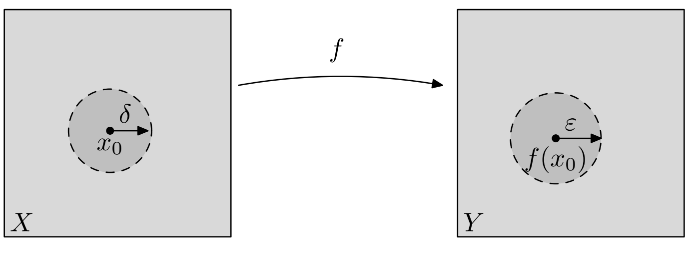


图 11.6 连续映射

其中, 记号 $B_\delta^X(x_0)$ 表示 X 中以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的开球, $B_\varepsilon^Y(f(x_0))$ 表示 Y 中以 $f(x_0)$ 为中心, 以 ε 为半径的开球.

例 11.5.1. *距离函数的连续性.*

设 a 是度量空间 (X,ρ) 中固定的一点, 则函数 $f(x) = \rho(x,a)$ 是连续的: 设 $x_0 \in X$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $x \in B_\delta(x_0)$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| = |\rho(x,a) - \rho(x_0,a)| \leqslant \rho(x,x_0) < \delta = \varepsilon,$$

因此 f 在 x_0 处连续.

命题 11.5.1 (连续映射的刻画)**.** *设 $f: X \to Y$ 为度量空间之间的映射, x_0 为 X 中的一点. 则*

(1) f 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对任意收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0);$$

(2) f 为连续映射 $\Longleftrightarrow$ 对任意开集 $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ 为 X 中开集;

(3) f 为连续映射 $\Longleftrightarrow$ 对任意闭集 $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ 为 X 中闭集.

证明. (1) "$\Longrightarrow$" 设 f 在 x_0 处连续, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0)).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 故 n 充分大时 $x_n \in B_\delta^X(x_0)$, 从而 $f(x_n) \in B_\varepsilon^Y(f(x_0))$, 这表明

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad (n \to \infty).$$

"$\Longleftarrow$" (反证法) 如果 f 在 x_0 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\delta = 1/n$, 存在 $x_n \in B_{1/n}^X(x_0)$, 而 $f(x_n) \notin B_{\varepsilon_0}^Y(f(x_0))$. 显然 $x_n \to x_0$, 但 $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, 矛盾!

(2) "$\Longrightarrow$" 设 f 为连续映射, V 为 Y 中开集. 如果 $x_0 \in f^{-1}(V)$, 则 $y_0 = f(x_0) \in V$, 由于 V 为开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon^Y(y_0) \subset V$. 根据连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(y_0) \subset V$, 即 $B_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(V)$, 这说明 $f^{-1}(V)$ 为开集.

"$\Longleftarrow$" 如果开集的原象仍为开集, 则任取 $x_0 \in X$ 以及 $\varepsilon > 0$, 记 $y_0 = f(x_0)$. 于是 $f^{-1}(B_\varepsilon^Y(y_0))$ 为 X 中包含 x_0 的开集, 从而存在 $\delta > 0$, 使得

$$B_\delta^X(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon^Y(y_0)),$$

即 $f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(y_0)$, 这说明 f 在 x_0 处连续.

(3): 留作习题. $\square$

注. (1) 如果 A 为 X 之子集, $f: A \to Y$ 为映射, 则把 X 的度量限制于 A, 从而 A 也为度量空间 (子度量空间), 此时可以定义 f 的连续性, 并有类似的刻画.

(2) 设 $f: A \to Y$ 连续, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\rho_1(a_1, a_2) < \delta$ 时 $\rho_2(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$, 则称 f 为一致连续映射.

例 11.5.2. *Lipschitz* 映射.

设 $f: X \to Y$ 是度量空间之间的映射, 如果存在常数 L, 使得

$$\rho_2(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L\rho_1(x_1, x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in X,$$

则称 f 为 Lipschitz 映射, L 称为 Lipschitz 常数. Lipschitz 映射是一致连续的. 特别地, 压缩映射是 Lipschitz 映射, 因此也是连续映射.

定理 11.5.2 (连续映射与紧性)**.** *设 $f: X \to Y$ 为连续映射, 则*

(1) f 将 X 中紧致集合映为 Y 中紧致集合;

(2) f 在紧致集合上一致连续.

证明. (1) 设 A 为 X 中紧致集合, 取 $f(A)$ 的开覆盖 $\{V_\alpha\}$, 则 $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ 为 A 的开覆盖, 从而存在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(V_{\alpha_i})$. 这说明 $f(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}$.

(2) 设 A 为紧致集合. 如果 f 在 A 上不是一致连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\delta = 1/n$, 存在 $a_n, b_n \in A$, 使得

$$\rho_1(a_n, b_n) < \frac{1}{n}, \quad \rho_2(f(a_n), f(b_n)) > \varepsilon_0.$$

$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别存在收敛子列, 不妨设它们本身是收敛的, 极限分别为 a_0, b_0, 则

$$\begin{aligned}\rho_1(a_0, b_0) &\leqslant \rho_1(a_0, a_n) + \rho_1(a_n, b_n) + \rho_1(b_n, b_0) \\ &< \frac{1}{n} + \rho_1(a_0, a_n) + \rho_1(b_n, b_0) \to 0,\end{aligned}$$

即 $a_0 = b_0$. 但

$$\varepsilon_0 < \rho_2(f(a_n), f(b_n)) \leqslant \rho_2(f(a_n), f(a_0)) + \rho_2(f(b_0), f(b_n)) \to 0.$$

这就导出了矛盾! □

推论 11.5.3 (最值定理)**.** *连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在紧致集合上可以取到最大值和最小值.*

证明. 设 A 为 X 中的紧致集合, 则 $f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧致集合, 因此为 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集. 这说明 $f(A)$ 中存在最大数和最小数, 它们分别是 f 在 A 上的最大值和最小值. □

定义 11.5.2 (道路连通)**.** 设 G 为 X 的子集, 如果任给 $x_1, x_2 \in G$, 均存在连续映射（连续曲线）$\sigma : I = [0,1] \to X$ 使得 $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$, $\sigma(I) \subset G$, 则称 G 道路连通.

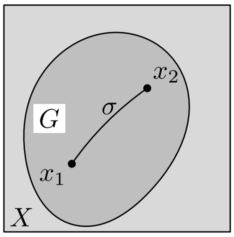


图 11.7 连通区域

显然, $\mathbb{R}^n$ 是道路连通的, 因为任何两点均可用直线段相连接.

命题 11.5.4. $\mathbb{R}$ 中道路连通集合必为区间（可退化为一点）.

证明. 设 $G \subset \mathbb{R}$ 道路连通, $a \leqslant b \in G$. 我们证明 $[a, b] \subset G$. 事实上, 由定义, 存在连续映射 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, 使得 $f(0) = a$, $f(1) = b$, $f([0,1]) \subset G$. f 为一元连续函数, 由介值定理, $[a, b] \subset f([0,1]) \subset G$. □

定理 11.5.5 (连续映射与连通性)**.** 连续映射将道路连通的集合映为道路连通集合.

证明. 设 $G \subset X$ 道路连通, $f : X \to Y$ 连续. 任取 $y_1, y_2 \in f(G)$, 则存在 $x_1, x_2 \in G$ 使得 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. 由定义, 存在连续映射 $\sigma : [0,1] \to X$ 使得 $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$, $\sigma([0,1]) \subset G$. 复合映射 $f \circ \sigma : [0,1] \to Y$ 连续, 且 $f \circ \sigma(0) = f(x_1) = y_1$, $f \circ \sigma(1) = f(x_2) = y_2$, $f \circ \sigma([0,1]) \subset f(G)$. $f \circ \sigma$ 就是 $f(G)$ 中连接 y_1, y_2 的道路. □

推论 11.5.6 (介值定理)**.** 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, $G \subset X$ 道路连通.

(1) 如果存在 x_1, $x_2 \in G$, 使得 $f(x_1)f(x_2) \leqslant 0$, 则存在 $x_0 \in G$ 使得 $f(x_0) = 0$;

(2) 对于满足条件 $f(x_1) \leqslant y \leqslant f(x_2)$ 的任意 y, 一定存在 $x \in G$ 使得 $y = f(x)$.

证明. 以 (2) 为例. 因为 f 连续, G 道路连通, 故 $f(G) \subset \mathbb{R}$ 也道路连通, 从而 $f(G)$ 为区间. 由 $f(x_1), f(x_2) \in f(G)$ 即知 $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(G)$, 特别地, $y \in f(G)$, 即存在 $x \in G$ 使得 $y = f(x)$. □

例 11.5.3. 设 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ 为单位圆周上的连续函数, 则存在 $x_0 \in S^1$, 使得

$$f(-x_0) = f(x_0).$$

证明. 考虑函数 $g : S^1 \to \mathbb{R}$, 使得

$$g(x) = f(x) - f(-x), \quad \forall\, x \in S^1.$$

则 g 也是连续函数, 且

$$g(x)g(-x) = [f(x) - f(-x)][f(-x) - f(x)] = -[f(x) - f(-x)]^2 \leqslant 0,$$

根据介值定理, 存在 $x_0 \in S^1$, 使得 $g(x_0) = 0$, 此时 $f(-x_0) = f(x_0)$. □

§11.5.2 欧氏的连续映射

在以后的章节中, 欧氏空间将是我们的研究对象. 因此, 我们要考虑从一个欧氏空间到另一个欧氏空间的映射. 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射称为一元函数; 当 $n>1$ 时, 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射称为多元函数; 一般地, 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射称为向量值函数.

对于多元连续函数来说, 其四则运算性质和一元连续函数没有什么不同.

命题 11.5.7. *设 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则*

(1) 当 $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ 时, $\lambda f+\mu g$ 也是连续函数;

(2) fg 为连续函数;

(3) 当 $g\neq 0$ 时, f/g 为连续函数.

现在我们考虑向量值的函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 写成分量的形式为

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x)),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^m.$$

我们有

命题 11.5.8. *$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为连续映射当且仅当 f_i 均为连续函数, 其中 $i=1,\cdots,m$.*

证明. 由连续性的刻画可知, f 在 x_0 处连续当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 根据欧氏空间中的极限性质,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0}f_i(x)=f_i(x_0),\quad i=1,\cdots,m.$$

即 f 在 x_0 处连续当且仅当 f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 均在 x_0 处连续. □

例 11.5.4. *线性映射.*

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 如果任给 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 成立

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y),\quad\forall\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R},$$

则称 f 为线性映射. $m=1$ 的情形就是线性函数.

记 e_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中第 i 个位置为 1, 其它位置为零的向量, 则 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准基. $\mathbb{R}^n$ 中的向量 x 可写为

$$x=(x_1,\cdots,x_n)=x_1e_1+\cdots+x_ne_n,$$

根据线性性, $f(x)$ 可写为

$$f(x)=f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=x_1f(e_1)+\cdots+x_nf(e_n),$$

这是线性函数表达式的推广. 如果记 $f(e_i) = (a_{1i}, \cdots, a_{mi})$, 用列向量表示, 则上式可改写为

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

这是线性映射的矩阵表示, f 由矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 完全决定了.

如果 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ 均为连续映射, 则复合映射 $g \circ f$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^s$ 的连续映射. 如果 f, g 均为线性映射, 且其矩阵表示分别为 A, B, 则 $g \circ f$ 也是线性映射, 其矩阵表示为 BA. 因此, 对于线性映射的研究可以转化为对于矩阵的研究, 这是线性代数的内容.

§11.5.3 二元函数及其极限

映射 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 称为二元函数. $\mathbb{R}^2$ 中的点用坐标 (x, y) 表示. 设 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$ 当

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

时, $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 就称 f 在 (x_0, y_0) 处有极限 (重极限), 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A.$$

如果对于每一个固定的 y, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ 存在, 则可以定义极限

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y).$$

类似地定义 $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, 称它们为累次极限.

例 11.5.5. (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$, 这是因为

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}|xy| \leqslant \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

(2) $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处无极限 (分别考虑 $y = x$ 和 $y = x^2$.)

(3) $f(x, y) = x \sin \dfrac{1}{y}$. 由 $|f(x, y)| \leqslant x$ 知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, 但 $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ 不存在.

(4) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = 0$, 但由 (2) 知重极限不存在.

定理 11.5.9. 如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$, 且对任意 $y\neq b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y)$ 存在, 则

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=\lim_{y\to b}\varphi(y)=A;$$

如果对任意 $x\neq a$, $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ 也存在, 则

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y)=A=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

证明. 以 A 有限为例. 由假设, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

时 $|f(x,y)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 固定 y, 令 $x\to a$, 得

$$\Big|\lim_{x\to a} f(x,y)-A\Big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\quad \forall\ 0<|y-b|<\frac{\delta}{2}.$$

这说明

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=A.$$

其它情形可类似证明. □

习题 11.5

1. 证明连续映射的复合仍为连续映射.

2. 设 $f:X\to Y$ 为从度量空间到度量空间的映射. 证明, f 为连续映射的充分必要条件是闭集的原象还是闭集.

3. 举例说明, 从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射不一定把闭集映为闭集 (提示: 考虑一元函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图像, 并向 x 轴作投影).

4. 设 A 为度量空间 (X,d) 中的子集, 令

$$d_A: X\to\mathbb{R},\quad d_A(x)=\inf_{a\in A} d(a,x).$$

   证明 d_A 为连续映射, 且 $d_A(x_0)=0$ 当且仅当 $x_0\in\bar{A}$.

5. 设 $v,w\in\mathbb{R}^2$ 为两个线性无关的向量, 如果函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足条件

$$f(x+v)=f(x),\quad f(x+w)=f(x),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^2,$$

   则称 f 为双周期函数. 证明, 双周期连续函数一定可以取到最大值和最小值.

6. 证明, $\mathbb{R}^n$ 不能写成两个不相交非空闭集的并. (提示: 考虑道路连通性质.)

7. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 则存在两个不同的点 $p,q\in\mathbb{R}^2$, 使得 $f(p)=f(q)$.

8. 判断下列极限是否存在, 如存在则计算出来:

$$(1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}};\qquad (2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$$
$$(3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\ln(x^2+y^2);\qquad (4)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}.$$

9. 判断下列极限是否存在, 如存在则计算出来:

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4};\quad (2)\ \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4};\quad (3)\ \lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to 0}\frac{x^y}{1+x^y};$$
$$(4)\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y};\quad (5)\ \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y};\quad (6)\ \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}.$$

10. (*) 证明 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面

$$S^n=\Big\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\Big\}$$

是道路连通的集合.

11. (*) 设多元函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在每一点附近都是有界的. 则 f 连续的充分必要条件是其图像 $\mathrm{graph}(f)$ 为闭集, 其中

$$\mathrm{graph}(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,x\in\mathbb{R}^n\}.$$

12. (*) 给定 $\mathbb{R}^n$ 中 m 个点, 证明存在 $\mathbb{R}^n$ 中半径最小的闭球包含这些给定的点, 并且这样的球是惟一的; 如果给定 3 个点, 求这个球的球心和半径.