

目 录

第五章 级 数	1
§ 1. 数项级数 . 同号级数收敛性的判别法	1
§ 2. 变号级数收敛性的判别法	70
§ 3. 级数的运算	119
§ 4. 函数项级数	131
§ 5. 幂级数	216
§ 6. 福里叶级数	333
§ 7. 级数求和法	388
§ 8. 利用级数求定积分之值	439
§ 9. 无穷乘积	451
§ 10. 斯特林格公式	507
§ 11. 用多项式逼近连续函数	511

第五章 级数

§ 1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1° 一般概念 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (级数的和)

存在, 式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数(1)为收敛的. 反之, 则称级数(1)为发散的.

2° 哥西准则 级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\epsilon > 0$, 都存在有数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$$

成立.

特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3° 比较判别法 I. 设除级数(1)外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 则 1) 从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛; 2) 从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是,当 $n \rightarrow \infty$ 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° 比较判别法 I. 设

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right) \text{ ①},$$

则(a)当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $p \leq 1$ 时级数(1)发散.

5° 达朗伯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则(a)当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

6° 哥西判别法 若 $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则(a)当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

7° 拉阿伯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则(a)当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $p < 1$ 时级数(1)发散.

8° 高斯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\epsilon > 0$, 则(a)当 $\lambda > 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $\lambda < 1$ 时级数(1)发散; (b)当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 则级数(1)收敛; 若 $\mu \leq 1$ 则级数(1)发散.

9° 哥西积分的判别法 若 $f(x) (x > 0)$ 是非负的不增函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

① 记号 O^* 的意义参阅第一章 § 6, 1°.

与积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散。

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

$$2546. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \cdots.$$

解 由于

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

即所给级数收敛, 且其和为 $\frac{2}{3}$. (以下有关各题省略这两句话)

$$2547. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$2548. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots.$$

解 由于

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right], \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

$$2549. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

$$2550. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

$$2551. (a) q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1);$$

$$(b) q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1).$$

解 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = qe^{i\alpha}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$.

于是得 $|z| = |q| < 1$, 并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin n\alpha \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-q\cos\alpha - i q\sin\alpha} \\ &= \frac{(1-q\cos\alpha) + i q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

比较(1)、(2)两式的实部及虚部, 即得

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin \alpha = \frac{q \sin \alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha - 1$$

$$= \frac{1 - q \cos \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} - 1 = \frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}.$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n-2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &\quad + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} \\ &\quad + \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$$

2553. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的收敛性.

解 记 $x = k\pi$. 若 k 为整数, 则由 $\sin nx = 0$ 知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 是收敛的, 且其和为零. 若 k 非整数, 我们以下

将证 $\sin nx$ 并不趋于零, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时也有 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$. 但是

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

由 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$ 及 $\sin nx \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 知 $\cos nx \sin x \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 而 $\sin x = \sin k\pi \neq 0$, 故必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0.$$

但

$$1 = \sin^2 nx + \cos^2 nx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 两端取极限, 即得左端为 1 而右端为 0, 这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真, 也即 $\sin nx \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的发散性获证.

2554. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots,$$

$$\text{则 } l_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S . 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的, 且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如, 级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的, 但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 记其和为 S . 考虑原级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并注意到 $a_k > 0 (k = 1, 2, \cdots)$, 故存在 n_0 , 使

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S.$$

显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是, $\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在有限, 即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n = (-1)^{n-1}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限不存在, 更不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$ 发散.

2558. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) - 1 = e - 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛, 且其和为 $e - 1$.

2559. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$.

解 由于 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 也发散.

2560. $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} + \cdots$.

解 由于 $\frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1001n}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ 也发散.

2561. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 发散.

2562. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$.

解 由于 $0 < \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

$$2563. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots.$$

解 由于 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 也收敛.

$$2564. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散.

2565. 证明, 由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$, 其中 d 为公差.

当 $d > 0$ 时, 总存在正整数 n_0 , 使 $a < (n_0-1)d$, 则当 $n \geq n_0$ 时, 总有 $a + (n-1)d < 2(n-1)d$. 于是,

$$\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2nd}$ 发散, 因而级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 也发散.

当 $d = 0$ 时, a 不可能为零, 此时级数 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots$

$+\frac{1}{a}+\cdots$ 显然发散.

当 $d < 0$ 时, 将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d > 0$ 的情形, 于是, 这级数也发散.

综上所述, 不论 d 为何值, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 均发散.

2566. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ 皆收敛且 $a_n \leq c_n \leq$

$b_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛. 若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性若何?

证 当级数 (A) 及 (B) 收敛时, 由于 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 故

$0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛, 故

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 也收敛, 再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n -$

$a_n)$ 的收敛性即得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + (c_n - a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也

收敛.

若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 则级数 (C) 可能收敛, 也可能发散. 例如, 级数

$$-1 - 1 - 1 - \cdots \quad \text{及} \quad 1 + 1 + 1 + \cdots$$

皆发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 当 $c_n = 0 (-1 < c_n < 1)$ 时收敛;

当 $c_n = \frac{1}{2} (-1 < c_n < 1)$ 也发散.

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数,问下列二级数的收敛性若何:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 及 (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

解 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 可能收敛,也可能发散.例如,级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散,但是

$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$ 却收敛.又如,级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 皆发散,但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 一定发散.事实上,

$$\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 也发散.

2568. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

倒过来不成立,举出例子.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 于是,总存在 n_0 . 使

当 $n \geq n_0$ 时,有 $0 \leq a_n < 1$. 从而,当 $n \geq n_0$ 时,有

$0 \leq a_n^2 < a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛,

故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 从而, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不真. 例如, $a_n = \frac{1}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 却发散.

2569. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 由于 $0 \leq 2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

其次, 由于 $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛, 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

最后, 设 $b_n = \frac{1}{n}$, 利用第一个结果即证得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \text{ 收敛.}$$

2570. 证明, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 $na_n = \frac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a > 0$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$, 故对于任

给的 $0 < \varepsilon < a$, 总存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} > a - \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ 或 $a_n > (a - \varepsilon) \frac{1}{n} > 0$.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 也收敛, 从而会得出级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2571. 证明, 若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

证 对于任何的 m 与 $n > m$, 我们有

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < a_m,$$

其中 a_m 为该收敛级数的余式, 由此得

$$na_n < \frac{n}{n-m} a_m.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 我们可取定某 m_0 , 使

$$a_{m_0} < \varepsilon.$$

其次, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-m_0} = 1$, 故存在 $n_0 (n_0 > m_0)$, 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{n}{n-m_0} < 2.$$

于是, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < na_n < 2\varepsilon,$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. 本题获证.

2572. 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p})$

$= 0$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

解 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0, \quad (1)$$

并不一定有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 例如, 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 显然级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但却有

$$\begin{aligned} 0 &< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} < \frac{p}{n+1}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+1} = 0$, 故对一切 p , (1) 式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾, 因为在哥西准则中, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 其中的 N 只依赖于 ε , 而与 p 无关. 本题的叙述中, 条件并没有排除 N 要与 p 有关. 利用哥西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots (|a_n| < 10).$

证 $|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}} \right|$
 $\leq \frac{|a_n|}{10^n} + \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}$
 $< \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{p-1}} \right)$
 $< \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$
 $= \frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}}.$

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{10^{n-2}} < 9\epsilon$, 即只要

$$n > 2 + \lg \frac{1}{9\epsilon}.$$

取 $N = 2 + \lceil \lg \frac{1}{9\epsilon} \rceil$, 则当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

对一切正整数 p 皆成立, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \cdots.$

证 $|S_{n+p} - S_n| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right|$
 $\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}.$ (1)

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故按哥西准则, 对于任给的

$\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 对任意正整数

p , 有

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} < \epsilon. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得知, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

对一切正整数 p 皆成立. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

$$2575. \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots \\ + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } S_{n+p} - S_n &= \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{\cos ix - \cos(i+1)x}{i} \\ &= \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \cos(i+1)x \\ &\quad - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } |S_{n+p} - S_n| &\leq \frac{1}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) + \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

对于任给的 $\epsilon > 0$, 取正整数 $N = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切正整数 p , 有

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{2}{n} < \epsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用哥西准则,证明下列级数的发散性:

$$2576. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

解 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$. 不论 n 多大,若令 $p=n$,则有

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} \\ &= \frac{1}{2} > \epsilon_0. \end{aligned}$$

因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$$2577. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

解 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{6}$. 不论 n 多大,若令 $p=3n$,则有

$$\begin{aligned} |S_{3n+p} - S_{3n}| &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} \\ &> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &> \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)}_{n \text{ 项}} \\ &= \frac{1}{6} > \epsilon_0. \end{aligned}$$

因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$ 发散.

运用达朗伯耳哥西或比较判别法,研究下列级数的收敛性:

$$2578. \frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \cdots + \frac{1000^n}{n!} + \cdots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ 收敛.

$$2579. \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

$$2580. \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} = e^{-1} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

$$2581. (a) \frac{2 \cdot 1!}{1^1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{2^n n!}{n^n} + \cdots;$$

$$(6) \frac{3 \cdot 1!}{1^1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{3^n n!}{n^n} + \cdots.$$

解 (a) 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(6) 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{3}{e} > 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

$$2582. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \cdots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \cdots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

$$2583. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000+n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1001 \cdots (1000+n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ 收敛.

$$2584. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n+2)}$ 收敛.

$$2585. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}),$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n=1} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$ 收敛.

$$2586. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

2587. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \sqrt[n]{n} > 0,$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \sqrt[n]{n},$$

由于其通项趋于 $\frac{1}{e} \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原级数也是发散的.

注意, 若用达朗伯耳判别法, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 无明确结论, 此时还应改用高斯判别法.

2588. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

解 当 $n > 1$ 时, $\ln n < n$. 于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0.$$

对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原级数也发散.

注意, 若用达朗伯耳判别法, 将遇到与 2587 题类似的情况.

2589.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 由于

$$0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^2},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数也收敛.

注意, 若用达朗伯耳判别法, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2 + 5n + 4)^{\frac{n+2}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{(2n^2 + 5n + 4)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 + 5n + 4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \end{aligned}$$

也可证得原级数收敛.

2590.
$$\begin{aligned} &\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &+ \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots \end{aligned}$$

解 方法一:

$$\sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4} = 2\sin \frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\cos \frac{\pi}{4}} = 2\sin \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos \frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos \frac{\pi}{8}} = 2\sin \frac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

利用数学归纳法,可证得通项为

$$a_n = 2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

故级数收敛.

方法二:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.
\end{aligned}$$

利用数学归纳法,可证得

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}}} \\
&\cdot \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ 重根号}}}.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}}} \\
&= \frac{1}{2}^{*}) < 1,
\end{aligned}$$

故级数收敛.

*)利用 637 题的结果.

2591. 证明:若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q (a_n > 0),$$

则 $a_n = o(q_1^n)$, 其中 $q_1 > q$.

证 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 故利用 141 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(q_1 - q) > 0$, 则由上式知存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - q \right| < \varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = \lambda q_1 (n \geq n_0),$$

其中 $\lambda = \frac{q_1 + q}{2q_1} < 1$. 利用 $\lambda^n = o(1)$, 即证得

$$a_n = \lambda^n q_1^n = o(q_1^n).$$

2592. 证明:若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

相反的结论不真. 研究例子

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

证 取 $0 < \varepsilon < 1 - q$, 由于

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1,$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = l < 1.$$

从而

$$0 < a_n \leq a_{n_0} l^{n-n_0} (n \geq n_0).$$

由于级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} l^{n-n_0}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

反之不真, 例如, 级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

显然是收敛的. 但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} (\frac{2}{3})^{m+1}, & \text{当 } n=2m+1; \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m, & \text{当 } n=2m, \end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

2593. 证明, 若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{A})$$

存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (\text{B})$$

也存在.

相反的结论不真: 若极限 (B) 存在, 则极限 (A) 可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证 利用 141 题的结论, 本题的前半部分即得证.

反之不真. 例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2 \cdot \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2}.$$

但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2[3 + (-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

2594. 证明, 若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q (a_n \geq 0),$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (6) 当 $q > 1$ 时这级数发散 (哥西判别法的推广).

证 (a) 取 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}(1 - q)$. 由于 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon.$$

从而

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} (n \geq n_0)$$

或

$$0 < a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \quad (n \geq n_0).$$

由于 $0 \leq q < 1$, 故 $0 < \frac{q+1}{2} < 1$. 又因级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\frac{q+1}{2})^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(6) 由于 $q > 1$, 故对于数列 $\{a_n\}$, 必有无穷多个 a_n , 能使不等式

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

成立, 从而

$$a_n > 1.$$

于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

研究级数的收敛性:

$$2595. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2 + (-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ 收敛.

$$2596. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

$$\text{解 } 0 < \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}.$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故它是收敛的,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}.$

解 $0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}.$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1, \end{aligned}$$

故它是收敛的,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉阿伯和高斯判别法,研究下列级数的收敛性:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots.$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2},$$

故当 $\frac{p}{2} > 1$ 即 $p > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$ 收敛.

2599. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots (a > 0, b > 0, d > 0).$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+nd}{a+nd} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a+nd} = \frac{b-a}{d}, \end{aligned}$$

故当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{b(b+d) \cdots [b+(n-1)d]}$ 收敛.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}.$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n! e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p}$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)}-1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x} = p - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

故当 $p - \frac{1}{2} > 1$ 即 $p > \frac{3}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 收敛.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}.$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty,
\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 收敛.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)} (p > 0, q > 0).$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right)$. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right) - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p \left(1 + \frac{qx}{1+x} \right) - 1}{x} = p+q,
\end{aligned}$$

故当 $p+q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛.

$$2603. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} (p > 0, q > 0).$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q \frac{1+n}{p+n} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px} - 1}{x} = q+1-p, \end{aligned}$$

故当 $q+1-p > 1$ 即 $q > p$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \text{ 收敛.}$$

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p (1+x)^q - 1}{x} = q + \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

故当 $q + \frac{p}{2} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$

收敛.

$$2605. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n (p > 0).$$

解 令 $a_n = \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \ln n}{n} = 0$ 故当 n 充

分大时, $a_n > 0$.

当 $x = 0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 它当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 当 $x \neq 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\ln(a_n n^{p+x}) &= x \ln n + n \ln \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right) \\ &= nu_n + n \ln(1 - u_n) = nu_n^2 \cdot \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2},\end{aligned}$$

其中 $u_n = \frac{x \ln n}{n}$, $u_n \neq 0 (n > 1)$, $u_n \rightarrow 0$, $nu_n^2 \rightarrow 0 (n \rightarrow$

$\infty)$. 由洛比塔法则, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v + \ln(1 - v)}{v^2} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1-v}}{2v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{2(v-1)} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n n^{p+x}) = 0 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}} = 1.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性, 故当

$p+x > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而当 $p+x \leq 1$ 时发散.

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 仅当 $x > 1 - p$ 时收敛.

2606. 证明: 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则 $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\epsilon}}\right) (\epsilon > 0)$.

证 下面记 $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n, \beta''_n, \epsilon_n$ 为无穷小量, 即 $\alpha_n = o(1), \alpha'_n = o(1), \beta_n = o(1), \beta'_n = o(1), \beta''_n = o(1), \epsilon_n = o(1) (n \rightarrow \infty)$.

由题设知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n}.$$

取对数, 即得

$$\begin{aligned} \ln a_n - \ln a_{n+1} &= \ln \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n} \right) \\ &= \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(p + \alpha'_n). \end{aligned}$$

令 $n=1, 2, \dots, N-1$ 并求和, 则得

$$\ln a_1 - \ln a_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}(p + \alpha'_n).$$

由 143 题(在其中令 $x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n}, y_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$) 知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n} \right) / \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha'_N = 0.$$

又由 146 题知

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = C + \ln(N-1) + \epsilon_N,$$

其中 C 是尤拉常数, $\epsilon_N \rightarrow 0$. 于是, 令

$$\beta_N = \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n} \right) / \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{有} \quad \ln a_1 - \ln a_N &= (p + \beta_N) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \\ &= (p + \beta_N)[C + \ln(N-1) + \epsilon_N] \end{aligned}$$

$$= (p + \beta_N) \ln(N-1) + k + \beta'_N,$$

其中 $k = Cp$ 为常数. 于是,

$$\ln a_N = - (p + \beta_N) \ln(N-1) + k' - \beta'_N,$$

其中 $k' = \ln a_1 - k$ 为常数, 从而

$$\begin{aligned} a_N &= e^{k' - \beta'_N \cdot (N-1)^{-(p+\beta_N)}} \\ &= e^{k' - \beta'_N} \cdot \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p+\beta_N)} \cdot N^{\beta'_N} \cdot N^{-p}. \end{aligned}$$

其中 $\beta''_N = -\beta'_N$. 由于 $\beta''_N = o(1)$, 故对于任给的 $\epsilon > 0$, 当 N 充分大时, 有 $|\beta''_N| < \frac{\epsilon}{2}$, 从而 $N^{\beta''_N} < N^{\frac{\epsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p+\beta_N)} = 1,$$

即知: 当 N 充分大时, 有

$$0 < a_N \leq k'' \cdot N^{\frac{\epsilon}{2}} \cdot N^{-p} = O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\epsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是, 得

$$a_N = o\left(\frac{1}{N^{p-\epsilon}}\right).$$

本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶, 从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 设:

$$2607. a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}, \text{ 其中 } n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q > 0.$$

解 由于 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$, 故当 $q - p > 1$ 即 $q > 1 + p$ 时, 级数收敛.

$$2608. a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

解 由于 $a_n \geq 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \pi \text{ 或 } a_n = O^* \left(\frac{1}{n^{p+1}} \right),$$

故仅当 $1+p > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

$$2609. a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} (n > 1).$$

解 由于 $a_n < 0$, 且

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^p \ln \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = O^* \left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}} \right),$$

故仅当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

$$2610. a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right).$$

解 由于 $a_n > 0$ ($n > 2$ 时), 且

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^p} \ln^p \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \right) \sim \frac{1}{2^p} \operatorname{tg}^{2p} \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{2^p} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2p} \\ &= O^* \left(\frac{1}{n^{2p}} \right), \end{aligned}$$

故仅当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 级数收敛.

$$2611. a_n = \lg_{bn} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

解 显然 $b \neq 1$ (否则 a_n 无意义). 由于

$$a_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)}{n \ln b} \sim \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2} = O^* \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

故级数收敛.

$$2612. a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{n[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O^*\left(\frac{1}{n^3}\right)]} \\ &= e^{1 - \frac{1}{2n} + O^*\left(\frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

由于 $a_n > 0$, 且

$$\begin{aligned} a_n &= [e(1 - e^{-\frac{1}{2n} + O^*\left(\frac{1}{n}\right)})]^p \sim e^p \left[\frac{1}{2n} + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^p \\ &= O^*\left(\frac{1}{n^p}\right), \end{aligned}$$

故仅当 $p > 1$ 时, 级数收敛.

$$2613. a_n = \frac{1}{n^1 + \frac{k}{\ln n}}.$$

解 由于

$$a_n = n^{-(1 + \frac{k}{\ln n})} = e^{-(1 + \frac{k}{\ln n}) \ln n} = e^{-(\ln n + k)} = \frac{1}{n} e^{-k},$$

故级数显然发散.

$$2614. a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

解 由于

$$a_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} = O^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

故级数发散.

$$2615. \text{ 证明: 若有 } \alpha > 0 \text{ 使当 } n \geq n_0 \text{ 时 } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 收敛; 若 $n \geq n_0$ 时 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则这级数发散(对数判别法).

证 若 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$, 则 $\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$ 或 $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

若 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则 $\frac{1}{a_n} \leq n$ 或 $a_n \geq \frac{1}{n}$. 由于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

研究具如下通项的级数的收敛性:

2616. $a_n = n^{\ln x} (x > 0)$.

解 由于

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{-\ln x \cdot \ln n}{\ln n} = -\ln x,$$

故利用 2615 题的对数判别法, 即知仅当 $-\ln x > 1$ 或 $x < \frac{1}{e}$ 时, 级数收敛.

2617. $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} (n > 1)$.

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln[\ln(\ln n)]$. 对于 $\alpha > 0$, 显然存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, $\ln[\ln(\ln n)] \geq 1 + \alpha$, 故级数收敛.

2618. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} (n > 1)$.

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$. 由洛比塔法则知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = 0$, 从而存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 利用 2615 题的结论, 即知级数发散.

利用哥西积分判别法, 研究具如下通项的级数的收敛性:

2619. $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$.

解 由于不论 p 为何数, 当 x 充分大时, 函数 $\frac{1}{x \ln^p x}$ 都是非负递减的, 并且

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-p) \ln^{p-1} x} \right|_2^{+\infty}, & p \neq 1; \\ \left. \ln \ln x \right|_2^{+\infty}, & p = 1 \end{cases}$$

仅当 $p > 1$ 时收敛, 故级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

2620. $a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} (n > 2)$.

解 易知函数 $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$ (不论 p, q 为何实数) 的导函数当 x 充分大时是负的, 故当 x 充分大时, $f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p = 1$, 则

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q}$$

$$= \begin{cases} \left| \frac{1}{(1-q)(\ln \ln x)^{q-1}} \right|_3^{+\infty}, & q \neq 1; \\ \left| \ln \ln \ln x \right|_3^{+\infty}, & q = 1. \end{cases}$$

当 $q > 1$ 时收敛, $q \leq 1$ 时发散, 故由哥西积分判别法知, 原级数当 $p = 1, q > 1$ 时收敛, $p = 1, q \leq 1$ 时发散.

若 $p \neq 1$, 作代换 $\ln x = t$, 有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}.$$

当 $p > 1$ 时, 取 $\eta > 0$ 使 $p - \eta > 1$, 由于 (不论 q 为何实数)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p-\eta} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\eta (\ln t)^q} = 0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 收敛, 从而原级数收敛; 当 $p < 1$ 时, 取 $\tau > 0$ 使 $p + \tau < 1$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p+\tau} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\tau}{(\ln t)^q} = +\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 发散, 从而原级数发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $p = 1, q > 1$ 及 $p > 1, q$ 任意时收敛.

2621. 研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

的收敛性.

解 由于

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k < n \ln n,$$

故

$$\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n} > 0.$$

利用 2619 题中 $p = 1$ 的结果, 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散.

2622. 证明: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调减小, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证 设 $S_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}$, 则因

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{2^{n-1}} > a_{2^{n-1}+1} > \cdots > 0,$$

故得

$$0 < S_{2^n} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^{n-1}+1}) < a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}, \quad (1)$$

且有

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n}) > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 由(2)

式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. 由此本题获证.

注意, 在此命题中, 用作比较的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

可以用更普遍的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_m$$

来代替,其中 m 为任一自然数. 证法类似.

2623. 设 $f(x)$ 为单调不增加的正值函数. 证明,若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 收敛, 则对于其余项 } R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \text{ 有以下的}$$

估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

利用此式,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性,根据哥西积分判别法,

知积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 由于 $f(x)$ 单调不增加,故

$$f(n+k+1) \leq \int_{n+k}^{n+k+1} f(x) dx \leq f(n+k) \\ (k=1, 2, 3, \dots).$$

将这些不等式相加,得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

$$\text{即 } R_n - f(n+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n,$$

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx,$$

(1)

这就是所需证的不等式.

注意,原题中将(1)中的“ $\leq$ ”误写为“ $<$ ”,这是不

对的,例如,若令

$f(x) = \frac{1}{n^2}$, 当 $n \leq x < n+1$ 时 ($n=1, 2, \dots$), 则不等

式(1)中左端的“ $\leq$ ”号成为“ $=$ ”号:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots;$$

若令

$f(x) = \frac{1}{n^2}$, 当 $n < x \leq n+1$ 时 ($n=1, 2, \dots$),

则不等式(1)中右端的“ $\leq$ ”成为“ $=$ ”号:

$$\begin{aligned} R_n &= f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots. \end{aligned}$$

最后,利用不等式(1)来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和,精确到 0.01. 易知,当取 $n=8$ 时,即有

$$R_8 \leq \frac{1}{9^3} + \int_9^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0.008,$$

故取 $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^3} \doteq 1.20$ 作为级数和的近似值,即可保证误差不超过 0.01.

2624. 证明厄耳玛可夫判别法: 设 $f(x)$ 为单调减少的正值函数,又设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

若 $\lambda < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛; 若 $\lambda > 1$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时, 有

$$e^x f(x) < (\lambda + \epsilon) f(x).$$

当 $\lambda < 1$ 时, 取 ϵ 使 $\lambda + \epsilon = \rho < 1$, 则有

$$e^x f(e^x) < \rho f(x).$$

于是, 当 $m > N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx,$$

即
$$\int_{e^N}^{e^m} f(x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx,$$

也即

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \int_{e^N}^{e^m} f(x) dx &< \rho \int_N^m f(x) dx - \rho \int_{e^N}^{e^m} f(x) \\ &= \rho \int_N^{e^N} f(x) dx - \rho \int_m^{e^m} f(x) dx. \end{aligned}$$

由于 N 充分大且 $m > N$, 故 $m < e^m$. 又因 $f(x) > 0$, 故 $\int_m^{e^m} f(x) dx > 0$. 从而

$$\begin{aligned} (1 - \rho) \int_{e^N}^{e^m} f(x) dx &< \rho \int_N^{e^N} f(x) dx, \\ \int_{e^N}^{e^m} f(x) dx &< \frac{\rho}{1 - \rho} \int_N^{e^N} f(x) dx. \end{aligned}$$

固定 N , 让 $m \rightarrow +\infty$, 取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\rho}{1 - \rho} \int_N^{e^N} f(x) dx = \text{常数}.$$

于是, 由哥西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda > 1$ 时, 则取 N 为充分大, 可得

$$e^x f(e^x) \geq f(x) \quad (x > N).$$

从而

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx \geq \int_N^m f(x) dx,$$

即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^m f(x) dx$$

或

$$\int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geq \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx \quad (m > N).$$

今设 $e_0 = N+1, e_1 = e^{e_0}, e_2 = e^{e_1}, \dots, e_{k+1} = e^{e_k}, \dots$, 并分别取 $m = e_0, e_1, e_2, \dots$, 则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

.....

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx$$

.....

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x) dx$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_N^{e^N} f(x) dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx$ 为发散的, 故由哥西积分判别法

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

2625. 证明罗巴契夫斯基判别法: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调

趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

同时收敛或同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geq 2^{-m} (n = 1, 2, \dots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的指标.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n \geq 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大指数, 故有

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

.....

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},$$

于是,

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} \geq (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \quad (1)$$

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} < (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (2)$$

将(1)式及(2)式对 m 从 1 到 N 求和(其中 N 为任意正整数), 得

$$\sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) \geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m},$$

$$\sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) < \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}.$$

由上述两个不等式可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 同时收敛或同时发散. 因此,我们如果能证明级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散,则命题即获证.

由 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 的收敛性易得 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 的收敛性. 反之,若级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 收敛,则 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 也收敛. 事实上,记 $A = \sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \cdot \frac{1}{2^{m-1}}$, 由于 $p_m - p_{m-1} \geq 0 (m = 1, 2, \cdots)$, 故有

$$\begin{aligned} A &\geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{m=1}^N p_{m-1} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{l=0}^{N-1} p_l \cdot \frac{1}{2^l} \\ &= \frac{1}{2^{N-1}} p_N + \sum_{m=1}^{N-1} p_m \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} \right) - p_0 \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m} + \frac{1}{2^{N-1}} p_N - p_0. \end{aligned}$$

若记 $S_N = \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m}$, 则由上式得

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} + p_0 - \frac{1}{2^{N-1}} p_N \\ &\leq p_0 + \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} \leq p_0 + A. \end{aligned}$$

因而数列 $\{S_N\}$ 单调上升且有界, 故 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ 存在有限,

即级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛. 证毕.

研究下列级数的收敛性:

2626. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}$

解 由于

$$0 < \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a} = \frac{4}{n^a (\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^a (\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} \bigg/ \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}} = 2,$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ 仅当 $a + \frac{1}{2} > 1$ (即 $a > \frac{1}{2}$) 时收

敛, 即知原级数仅当 $a > \frac{1}{2}$ 时收敛.

2627. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}).$

解 利用公式

$$\alpha - \beta = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)},$$

得

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b} \\ &= \frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}. \end{aligned}$$

由此可知, 不论 $a = \frac{1}{2}$ 还是 $a \neq \frac{1}{2}$, 当 n 充分大时, 上式右端均保持定号, 故原级数可当成正项级数处理.

若 $a = \frac{1}{2}$, 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})} \bigg/ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^2 - b}{4}, \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛;

若 $a \neq \frac{1}{2}$, 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})} \\ & \bigg/ \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2a-1}{4} \neq 0, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散, 故原} \end{aligned}$$

级数发散.

$$2628. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - 1 \right) + \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \right]. \end{aligned}$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} \right) \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right),$$

它们都是正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} \right)$ 发

散, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$ 收敛, 从而, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \text{ 发散.}$$

$$2629. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right].$$

解 当 $x \neq 0$ 及 $-1 < x < +\infty$ 时, 有

$$\ln(1+x) < x.$$

利用上式, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n},$$

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1}$$

$$= -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$$

于是,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} < \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数也收敛.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}.$

解 先设 $a > 2$. 利用斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} + \frac{\theta_n}{12n} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^a} = \frac{\ln 2\pi}{2n^a} + \frac{\ln n}{2n^a} + \frac{\ln n}{n^{a-1}} + \frac{\theta_n}{12n^{a+1}} - \frac{1}{n^{a-1}}.$$

显然, 当 $a > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{a-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^{a+1}}$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-1}}$ 均收敛, 故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 收敛.

现设 $a \leq 2$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 利用 139 题的结果

可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty,$$

从而

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^a} \bigg/ \frac{1}{n^{a-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty, \end{aligned}$$

再注意到此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-1}}$ 发散, 即知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 发散.

2631. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}.$

解 方法一:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(e^{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} - 1 \right) \\ &= \frac{e^{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} - 1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} \cdot n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} = 0, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} = +\infty, \end{aligned}$$

利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = +\infty$, 故级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

方法二:

当 t 充分大时, 有

$e^t \geq At^4$ (A 为大于零的常数),
故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$e^{\frac{3}{4}n} \geq An^{\frac{4}{3}}.$$

从而

$$e^{-\frac{3}{4}n} \leq \frac{1}{A} n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ 收敛, 故原级数收敛.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$

解 当 t 充分大时, 有 $e^t \geq Bt^7$ ($B > 0$ 为常数), 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < n^2 e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{B} n^{-\frac{7}{2}+2} = \frac{1}{B} n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故原级数收敛.

2633. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$

解 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{e^{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又由于

存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 < \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($A > 0$, 常数),

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛, 从而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

2634. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$

解 先设 $c \neq 0$. 若 $bc - ad \neq 0$, 应用阿拉伯判别法, 我们有

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \frac{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} - \frac{a \ln(n+1) + b}{c \ln(n+1) + d}}{1} \\ &= n \left\{ \frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{e^{\frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{c \ln n + d}} - 1} \right\} \\ &= \frac{\frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{e^{\frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{c \ln n + d}} - 1}}{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \cdot \frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(c \ln n + d) [c \ln(n+1) + d]}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述等式右端的第一个因子趋于 1, 第二个因子趋于 $bc - ad$, 第三个因子趋于零, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 0.$$

从而级数发散; 若 $bc - ad = 0$, 此时 $a_n = \text{常数} > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 故级数发散.

若 $c = 0$, 则,

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \frac{e^{-\frac{a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{d}} - 1}{-\frac{a}{d} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &\quad \cdot \left(-\frac{a}{d} \right) \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow -\frac{a}{d} \quad (d \neq 0). \end{aligned}$$

于是, 如果 $-\frac{a}{d} > 1$ 即 $\frac{a}{d} < -1$, 则级数收敛; 如果 $-\frac{a}{d} < 1$, 则级数发散; 若 $-\frac{a}{d} = 1$, 则 $a_n = \frac{C}{n} (C > 0 \text{ 是常})$

数), 从而级数发散.

$$2635. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}} = \left(\frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} \right)^2$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故
$$\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)} \sim \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n > 1$ 时, $0 < \ln n < \sqrt{n}$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 从而原级数发散.

$$2636. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$$

解 若 $a=0$. 级数显然发散.

若 $a \neq 0$. 由于

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{a}{n}}$$

$$= e^{n^2 \ln \left[1 - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]}$$

$$= e^{n^2 \left[-\frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]} = e^{-\frac{a^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}$ 当 $a \neq 0$ 时收敛.

2637. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right].$

解 $a_n = \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]$

$$= \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}},$$

其中 $\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时).

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{ch} \pi x + \pi \sin \pi x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \operatorname{ch} \pi x + \pi^2 \cos \pi x}{2} = \pi^2, \end{aligned}$$

故得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\
&\quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\
&= 1 \cdot \pi^2 \cdot 1 = \pi^2,
\end{aligned}$$

故存在常数 $k > 0$, 有 $\left| \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq k$ (n 充分大), 即 $|a_n| \leq k$

$\cdot \frac{1}{n^2}$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$

解 由于

$$n! > \left(\frac{n}{e} \right)^{n^{**}},$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{e^n} n^{n - \sqrt{n}} = b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{e} n^{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因此级数

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 从而原级数发散.

*) 利用 74 题的结论.

2639. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \ln n}{(\ln n)^n}$.

解 $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n \ln(\ln n)}} = e^{-(n \ln(\ln n) - \ln^2 n)}.$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}{n} = +\infty,$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$n \ln(\ln n) - \ln^2 n \geq An$$

其中 A 为大于零的常数, 从而有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{e^{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}} \leq \frac{n^2}{e^{An}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

于是, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

2640. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{c^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right) \right] \\ &= \ln a - \frac{1}{2} (\ln b + \ln c) = \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}. \end{aligned}$$

当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时 $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0$, 且当 n 充分大时, 级数的项不变号, 故当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right)$ 发散.

当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$. 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{8} (\ln b - \ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$ 收敛, 即当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 原级数收敛.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1).$

解 当 $a \geq 0$ 时, $a_n = n^{n^a} - 1 \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散.

当 $-1 \leq a < 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{\frac{1}{x^{|a|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|a|}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} \left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}} \right)}{-|a| \cdot \frac{1}{x^{|a|+1}}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} (\ln x - |a|^{-1}) = +\infty, \end{aligned}$$

故对于 $a_n = n^{n^a} - 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|a|}}} \rightarrow \infty.$$

因此,存在常数 $k > 0$, 使 $a_n \geq k \cdot \frac{1}{n^{|a|}}$, 但当 $|a| \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|a|}}$ 发散, 从而当 $-1 \leq a < 0$ 时, 原级数发散.

当 $a < -1$ 时, 取 β 使 $a < \beta < -1$, 于是 $|a| > |\beta| > 1$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} \left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}} \right)}{-|\beta| \cdot \frac{1}{x^{|\beta|+1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} \left(\left| \frac{a}{\beta} \right| \frac{\ln x}{x^{|a|-|\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|a|-|\beta|}} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛, 从而当 $a < -1$ 时, 原级数收敛.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right) \right].$

解 $a_n = \ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right)$. 显然必须设 $a \geq 0$. 因若 $a < 0$, 则对于某些 n , $\ln(\sin n^{-a})$ 可能无意义. 当 $a = 0$ 时,

$a_n = -\ln \sin 1 = \text{常数} > 0 (n=1, 2, \dots)$, 故此时级数发散, 当 $a > 0$ 时, 将 a_n 改写为

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \frac{1}{\sin \frac{1}{n^a}} = \ln \left[1 + \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \ln \left[1 + \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \right]^{\frac{\sin \frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a} - \sin \frac{1}{n^a}}}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^a}{\sin x^a} - 1}{x^{2a}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{\sin y} - 1}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^2 \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^3} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{3y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{6y} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}} = \frac{1}{6}.$$

从而得知: 当 $2a > 1$ 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

而当 $2a \leq 1$ 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} (a > 0).$

解 $a_n = a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时, 显然 $a_n=1$, 因而级数发散. 当 $a \neq 1$ 时, 考虑

$$\ln \frac{1}{a_n} = (b + c \ln n) \ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数判别法),即知:

(1)当 $c=0, b \ln a > 1$, 即 $a^b > e$ 时,原级数收敛;而当 $c=0, b \ln a \leq 1$, 即 $a^b \leq e$ 时,原级数发散.

(2)当 $c \neq 0, c \ln a > 0$, 即 $a^c > 1$ 时,原级数收敛;而当 $c \neq 0, c \ln a < 0$ 即 $a^c < 1$ 时,原级数发散.

综上所述,仅当 $c=0, a^b > e$ 及 $a^c > 1$ 时,原级数收敛.

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} (a > 0, b > 0).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \frac{1}{e^a \cdot e^b} \\ &= e^{-(a+b)}, \end{aligned}$$

故当 $a+b > 1$ 时,级数收敛;而当 $a+b \leq 1$ 时,级数发散.

$$2645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$$

解 $a_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}$. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n}{(n+3) \cdots (2n+2)} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n+2-2} \right]^{-1} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

(当 $n \rightarrow +\infty$ 时),

于是由 2592 题的结论知原级数收敛.

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性, 其通项如下:

$$2646. u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$$

解 由于

$$0 < u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1} dx = n^{-\frac{3}{2}},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2647. u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq \frac{1}{\int_0^n x dx} = \frac{2}{n^2}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2648. u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

解 由于

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)} > 0,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$$2649. u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的^{*}), 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

^{*}) 事实上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0$, 利用比较判别法即

获证.

$$2650. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$$

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $(0, \frac{\pi}{n})$ ($n \geq 2$) 内是单调增加的, 故有

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{1+0} \cdot \frac{\pi}{n} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \quad (n \geq 2).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2651. u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leq \frac{n \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdots (2n)} = \frac{n}{(n+1) \cdots (2n)} \\ &< \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \quad (\text{当 } n \text{ 足够大}), \end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2652. u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^a}.$$

解 首先,我们证明:当 $\alpha > 2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.事实上,

$$0 < u_n \leq \frac{n \ln^2 n}{n^\alpha} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

取 $\delta > 0$ 使 $\alpha - 1 - \delta > 1$, 由于

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = \frac{\frac{\ln^2 n}{n^\delta}}{n^{\alpha-1-\delta}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n^\delta} = 0$, 故当 n 充分大时, 有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}} \quad (C \text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛, 故当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

其次,我们证明:当 $\alpha \leq 2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.事实上,当 n 充分大时,有

$$u_n \geq \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2} = \frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1 \leq r \leq n$ 时, $(n-r)(r-1) \geq 0$, 故有

$$r(n-r+1) \geq n.$$

令 $r=1$, 得 $1 \cdot n = n$;

$r=2$, 得 $2(n-1) \geq n$;

.....

$r=n$, 得 $n \cdot 1 = n$.

连乘得

$$(n!)^2 \geq n^n \quad \text{或} \quad n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式, 可得

$$u_n \geq \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当 } n \geq n_0 \text{ 时}),$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用对应的级数来代替叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$, 然后研究它们的收敛性, 设:

$$2653. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 记 $x_0 = 0$, 故

$$x_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极根存在, 即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$2654. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

$$\text{解} \quad x_n - x_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \{(\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n-1} \cdot \ln[n(n-1)] \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \left[\ln n^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \left[2 \ln n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\
&= \frac{\ln n}{n} - \left\{ \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right\} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

考虑级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$. 由级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛性可知

级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛, 于是

$$x_n = \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2655. 假如

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (6)^+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad *;$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5} .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad (a) \text{ 余项 } R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

欲精确到 10^{-5} , 只要 $\frac{1}{N} < 10^{-5}$, 即只要

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明, 中译本基本是按俄文第二版翻译的, 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$N > 10^5 = 100000.$$

(6) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$. 利用 74 题的不等式

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (k=1, 2, \dots),$$

于是当 $n \geq N+1$, 有

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{(n+1)!} &< 2^n \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{2e}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{N+2} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \cdot \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)}. \end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned} R_N &< \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)} \\ &= \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^l. \end{aligned}$$

取 $N \geq 4$, 则 $\frac{2e}{N+2} < 1$, 此时又有

$$R_N < \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2} \frac{1}{1 - \frac{2e}{N+2}}.$$

取 $N=11$, 则有

$$R_N = \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{13}\right)^{13} \frac{1}{1 - \frac{2e}{13}} = \triangle_N.$$

利用对数对于 $\triangle_N$ 作数值计算, 有

$$\triangle_N \leq \frac{13}{15.126e} \left(\frac{2e}{13}\right)^{13} \approx 10^{-5.42266} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geq 11$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} .

(B) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (k=1, 2, \dots),$$

则有

$$\begin{aligned} R_N &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1} \\ &= \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}. \end{aligned}$$

取 $N \geq 1$, 则 $\frac{e}{2N+1} < 1$, 故有

$$R_N < \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{e}{2N+1}\right)^2}.$$

今取 $N=5$, 则有

$$R_N < \left(\frac{e}{11}\right)^{11} \cdot \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.6374} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geq 5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} .

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° 级数的绝对收敛性 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛, 绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性, 只须把对于同号级数收敛性的已知

判别法应用于级数(2)就够了.

若级数(1)收敛,而级数(2)发散,则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛).条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数(黎曼定理).

2° 莱布尼兹判别法 交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1}b_n + \cdots$$

($b_n \geq 0$)收敛(一般说来,非绝对地),若(a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \cdots$)和(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.在这种情形下,对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3° 亚伯耳判别法 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛,若1),级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,2)数 b_n ($n = 1, 2, \cdots$)形成一单调并有界的数列.

4° 迪里黑里判别法 级数(3)收敛若:1)部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的;2)当 $n \rightarrow \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零.

2656. 证明:可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数.利用哥西准则,即知:

对于给定的 $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$,存在 N_1 ,使对于任意自然数 m_1 ,有

$$|a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1}| < \epsilon_1;$$

对于给定的 $\epsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, 存在 N_2 (可取 $N_2 > N_1$), 使对于任意自然数 m_2 , 有

$$|a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2}| < \epsilon_2;$$

.....

对于给定的 $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 存在 N_k (可取 $N_k > N_{k-1}$), 使对于任意自然数 m_k , 有

$$|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \epsilon_k.$$

.....

$$\text{令 } A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1},$$

$$A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2},$$

.....

$$A_k = a_{N_k+1} + a_{N_k+2} + \cdots + a_{N_{k+1}},$$

.....

则有 $|A_k| < \epsilon_k = \frac{1}{2^k}$ ($k = 1, 2, \dots$), 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

收敛, 故级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ 收敛, 即级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛. 证毕.

2657. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 (a) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此级数的通项 a_n 趋于零; (b) 由组合已给级数的各项但不变更原有顺序所得的某一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛; (B) 在项 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 <$

$p_2 < \dots$) 中相加项 a_i 的数目是有界的, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m , 即

$$p_{n+1} - p_n \leq m \quad (n = 1, 2, \dots).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 考虑 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2m+1} > 0$. 由 $a_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故存在 N' , 使当 $n \geq N'$ 时, 有

$$|a_n| < \varepsilon_1.$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知, 存在 $N_1 \geq N'$, 使当 $n \geq N_1$ 及 p 为任意自然数时, 有

$$|A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+p}| < \varepsilon_1.$$

今取 $N = p_{N_1}$, 当 $n \geq N$ 时, 对任意自然数 s , 考察 $\Delta_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+s}$, 注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k .

记 A_n 内各项 a_i 元素的集合为 $\tilde{A}_n$, 即知: 当 $i < j$ 时, 若 $a_i \in \tilde{A}_k, a_j \in \tilde{A}_l$, 则必有 $k \leq l$. 今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项. 显然 $a_n \in \tilde{A}_{N_1+r}$ ($r \geq 0$). 再看以后各项, 便有

$$\Delta_{n,s} = B + A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q} + B'$$

其中 $B = a_n + \dots + a_{p_{N_1+r+1}-1}$, $B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \dots + a_{n+s}$. 很明显, B 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和, B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和, 于是 (注意 $n \geq N \geq N_1 \geq N'$)

$$|B| \leq (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r})\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1,$$

$$|B'| \leq (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q}| < \varepsilon_1,$$

从而(当 $n \geq N, s$ 为任何自然数)

$$|\Delta_{n,s}| \leq |B| + |A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| \\ + |B'| < (2m+1)\epsilon_1 = \epsilon.$$

根据哥西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证毕.

2658. 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则其和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 当然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 又记重

排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 再记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 N 项部分和为

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \text{ 记 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 的前 } N \text{ 项部分和为 } \sigma_N = \sum_{n=1}^N b_n. \text{ 当}$$

然有 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$. 今证 σ_N 的极限也存在, 且等于 S .

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N = \sigma_N - S_N.$$

任给 $\epsilon > 0$, 取 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2m} > 0$, 则存在 N_1 , 使当 $n \geq N_1$ 时, 有 $|a_n| < \epsilon_1$. 今取

$$N \geq N_1 + 2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 $\tilde{S}_k$, 记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_k$, 则有

$$\Delta_N = \sum b_n - \sum a_n.$$

$$b_n \in \tilde{\sigma}_N \quad a_n \in \tilde{S}_N.$$

今从 a_1 查起, 看 $a_1, a_2, \cdots$ 至 a_N , 注意每一个 a_i 被重排

成 b_j 时, i 与 j 的标号差不超过 m . 因此, 对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j = a_i$. 反过来, 从 b_1 查起, 看 $b_1, b_2, \dots$ 至 b_N , 对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i = b_j$. 但也可能且只有那种可能: 最后一段不超过 m 个元素的 a_i , 即 $a_N, a_{N-1}, \dots, a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后, 从而在 σ_N 内找不到搬迁元素, 但个数 (设为 r 个) 不超过 m . 同样, 也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j , 即 $b_N, b_{N-1}, \dots, b_{N-m}$ 之内若干个元素在 $\tilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素, 但个数 (设为 s 个) 不超过 m . 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是,

$$\begin{aligned}
 |\triangle_N| &= \left| \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} a_n \right| \\
 &\leq \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} |a_n| \\
 &< s\epsilon_1 + r\epsilon_1 \leq m\epsilon_1 + m\epsilon_1 = \epsilon.
 \end{aligned}$$

上式中 a_n 的下标 $n \geq N_1 + m > N_1$, 故 $|a_n| < \epsilon$. 而 b_n 的下标 $n \geq N_1 + m$, 记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来, 其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m , 故此时 $i \geq N_1$, 因而此时 $|b_n| = |a_i| < \epsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \triangle_N = 0,$$

也即有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S.$$

从而命题获证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和:

$$2659. 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$$

$$\text{解 } S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_n &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n-3}{2^{n-1}} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}, \end{aligned}$$

将上面两式相加, 得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} S_n &= 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-1}} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 3S_n &= 2 - 2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-2}} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \rightarrow \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{9}.$$

因此, 原级数收敛. 其和为 $\frac{2}{9}$.

$$2660. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

解 显然该级数绝对收敛, 从而它是收敛的, 记其和为 S . 考虑一个特殊的部分和

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{3n-3}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{3n-2}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{3n-1}} \right) \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \right) \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{10}{7}.$$

$$2661. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

解 考虑部分和 S_m . 当 $m = 2n$ 时, 有

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= C + \ln 2n + \epsilon_{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2} (C + \ln n + \epsilon_n) *) \end{aligned}$$

$$= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n = \ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$$

同样, 当 $m = 2n + 1$ 时, 也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln 2.$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_m = \ln 2,$$

即原级数收敛, 其和为 $\ln 2$.

*) 利用 146 题的结果.

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, 求从已知级数把各项重排后

所成级数:

$$(a) 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$(b) 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

的和.

解 (a) 考虑部分和 S_m . 当 $m = 3n$ 时, 有

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \\ -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

记 $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $l_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 则

$$l_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n, l_{4n} = \sigma_{4n} - \sigma_{2n},$$

且有

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sigma_{4n} - \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n \\ &= (\sigma_{4n} - \sigma_{2n}) + \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) \\ &= l_{4n} + \frac{1}{2}l_{2n}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{2n} = \ln 2$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2.$$

易证当 $m = 3n + 1$ 及 $m = 3n + 2$ 时, 有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们与 S_{3n} 有相同的极限, 从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{3}{2} \ln 2,$$

即原级数收敛, 其和为 $\frac{3}{2} \ln 2$.

(6) 部分和

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\ &\quad - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n} \right) \\
&= \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma_{2n} = \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) \\
&= \frac{1}{2}l_{2n},
\end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \ln 2$. 同样有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们与 S_{3n} 有相同的极限, 从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{1}{2} \ln 2,$$

即原级数收敛, 其和为 $\frac{1}{2} \ln 2$

2663. 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排, 使它成发散的.

解 我们这样进行重排: 先取两个正项, 然后取一个负项, 得

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \\
&+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots
\end{aligned} \tag{1}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数,如果它发散,当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} > \frac{1}{\sqrt{4n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}} > \frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} &> \frac{2}{\sqrt{4n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ > \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}} > 0 \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

发散, 从而, 重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}.$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而也是收敛的.

$$2665. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$$

解 $a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

故原级数绝对收敛,从而也是收敛的.

$$2666. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

解 将此级数每相邻三项组合得一新级数,它是交错级数,满足莱布尼兹判别法的两个条件,因而它是收敛的. 利用 2657 题的结果,即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

解 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\ln^{100} n}{n}$ 单调下降趋于零,且

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

为有界的,故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

$$2668. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

解 将通项改写为

$$(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛. 下面证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{2\cos 4n}{4n} \\ &= S_N^{(1)} - S_N^{(2)}. \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛 (因为当 $k \rightarrow \infty$

时, $\frac{1}{2k}$ 单调趋于零, 且

$$\left| \sum_{n=1}^k \cos 2n \right| = \left| \frac{\sin(2k+1) - \sin 1}{2\sin 1} \right| \leq \frac{1}{\sin 1},$$

故由迪里黑里判别法即获证), 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, $S_N \rightarrow S^{(1)} - S^{(2)}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛. 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$

解
$$(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 故原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \text{ 收敛.}$$

2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
 &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\
 &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).
 \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

$$2671. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) &= \sin\left[n\pi \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}\right] \\
 &= \sin n\pi \left[1 + \frac{k^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \\
 &= \sin\left[n\pi + \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
 &= (-1)^n \sin\left[\frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
 &= (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
 \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 故原级数收敛.

$$2672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$

解 这级数首先出现三个负项, 之后出现五个正项. 如此下去, 若将这些相邻且具相同符号的几项合并成

一项,则所得的新级数为一交错级数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right]. \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\begin{aligned} \frac{2}{k+1} &< \underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots}_{k \text{ 项}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1) \text{ 项}} < \frac{2}{k} \end{aligned}$$

事实上,开头 k 项的和小于 $k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$,而后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1) \cdot \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$,所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$.

左面的不等式可由整个和数大于 $k \cdot \frac{1}{k^2+k} + (k+1) \cdot \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+1}$ 而得.

于是,级数(1)的通项当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于零,并且它的绝对值单调减小,由莱布尼兹判别法即知级数(1)收敛.

注意,原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间,由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限,因此原级数部分和有极限,从而原级数收敛. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \right|$ 发散,故原级数仅为条件收敛.

$$2673. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 即通项不趋于零, 故级数发散.

2674. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) > 0,$$

则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ ($b_n > 0$) 收敛.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = A$, 我们取 $\epsilon > 0$, 使得 $A - \epsilon > 0$, 则存在自然数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$A - \epsilon < n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) < A + \epsilon$$

或

$$1 < 1 + \frac{A - \epsilon}{n} < \frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{A + \epsilon}{n}.$$

因此当 $n \geq N$ 时, $b_n > b_{n+1}$, 即 b_n 单调下降.

下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 事实上, 利用 2606 题的结果即知

$$b_n = o \left(\frac{1}{n^{A-\epsilon}} \right).$$

例如, 取 $\epsilon = \frac{A}{2}$, 于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $b_n \rightarrow 0$.

因此, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

$$2675. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

解 当 $p < 0$ 时, 由于 $n^{-p} \rightarrow +\infty$, 故级数发散.

当 $p = 0$ 时, 由于 $n^{-p} = 1$, 故级数也发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \rightarrow 0$ (其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$), 故此交错级数收敛; 然当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}.$

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故当 $p > 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}} \text{ 绝对收敛.}$$

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leq 1$ 时原级数的收敛性, 将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 而叙列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋

于 1 的叙列, 故由亚伯耳判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

收敛. 但因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 故当

$0 < p \leq 1$ 时, 原级数仅为条件收敛.

$$2677. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$$

解 $\ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$

考虑级数

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}, (3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}}.$$

显然当 $p > 1$ 时, 级数(1), (2), (3)均绝对收敛,

故当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数(1)条件收敛, 级数(2)及(3)

均绝对收敛, 故当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 由于通项不趋于零, 故原级数发散.

最后, 设 $0 < p \leq \frac{1}{2}$. 令 m 是满足

$$mp \leq 1 < (m+1)p$$

的唯一正整数(显然 $m \geq 2$). 我们有

$$\begin{aligned} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \cdots + (-1)^{m-1} \\ &\cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}} + O\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right). \end{aligned}$$

若 m 为偶数, 则由于交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}, \dots, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)n}}{n^{(m-1)p}}$ 均收敛(条件收敛),

级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{(m+1)p}}$ (绝对) 收敛, 而级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \dots + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n^{mp}} \right)$$

显然发散, 故知原级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$ 发散; 若 m

为奇数, 则可类似地证明原级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$ 也发散.

2678. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2^n} x}{n}.$

解 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2^n} x}{n}$. 考虑

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} \sin x)^2}{\sqrt[n]{n}} \\ &= (\sqrt{2} \sin x)^2, \end{aligned}$$

故当 $\sqrt{2} \sin^2 x < 1$, 即 $|x - n\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

当 $\sqrt{2} \sin^2 x = 1$, 即当 $|x - n\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 原级数

为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 它为条件收敛.

当 $\sqrt{2} \sin^2 x > 1$ 时, 例如可选取 α , 使

$$\sqrt{2} \sin^2 x > \alpha > 1.$$

当 n 充分大时, 有

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \alpha \text{ 或 } |a_n| \geq \alpha^n > 1,$$

上式表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 并非趋于零, 故此时原级数发散.

$$2679. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

解 当 x 为负整数时, 级数显然无意义.

当 x 不为负整数时, 此交错级数满足莱布尼兹判别法的条件, 故它是收敛的. 但因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ 发散, 故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

$$2680. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} &= \frac{(-1)^n}{n^p \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^p} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} \left[1 - \frac{p \cdot (-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \end{aligned}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 及

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 原级数显然发散.

$$2681. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^{-p} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} - \frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

故原级数当 $p > 2$ 时绝对收敛; 而当 $p \leq 0$ 时原级数显然发散. 下面我们再来研究当 $0 < p \leq 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1 < p \leq 2$ 时, 由 (1) 式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛, 而由第二项、第三项组成的级数显然收敛, 故此时原级数条件收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由第一项及第三项组成的级数收敛, 但由第二项组成的级数发散, 故此时原级数发散.

$$2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left[1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right]^{-1} \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left[1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \right] \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right). \end{aligned}$$

当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由第二项及第三项所组成的级

数均收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小, 又

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

故由迪里黑里判别法知它是收敛的. 从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时,

原级数收敛. 又因 $\frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p}$,

且当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛, 故当

$\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{n^p}$ 发散, 从而此时原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝

对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n^{2p}} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{2n} \geq 0,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{8}}{2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n}$ 发

散, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散. 再仿 2677 题 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 情形之证, 即易知原级数发散.

2683. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}.$

解 通项为

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right). \end{aligned}$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ 绝对收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ 条件收敛, 故原级数条件收敛.

2684. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n},$

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1,$$

故原级数绝对收敛.

$$2685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2}} = e^0 = 1,$$

从而知通项 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 故原级数发散.

$$2686. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

解 由于 $\frac{1}{\ln n}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时单调下降趋于零, 又部分和

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=2}^n \sin \frac{m\pi}{12} \right| &= \left| \frac{\cos \frac{\pi}{24} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{24}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

有界, 故级数收敛.

但是

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right| &\geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{12}}{\ln n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n} \\ &= \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n}, \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛, 故级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right|$ 发散. 从而, 原级数仅为条件收敛.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$

解 记 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\} (l=1, 2, \dots)$. 显然 A_l 中的元素 n 满足

$$l^2 \leq n < (l+1)^2,$$

于是 A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑,

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

则有

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^l}{n^p} = (-1)^l v_l,$$

其中

$$v_l = \sum_{n \in A_l} \frac{1}{n^p}.$$

当 $p > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_l - v_{l+1} &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{1}{(l^2 + s)^p} - \sum_{s=0}^{2(l+1)} \frac{1}{[(l+1)^2 + s]^p} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \left\{ \frac{1}{(l^2 + s)^p} - \frac{1}{[(l+1)^2 + s]^p} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l+1]^p} \\ &\quad - \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l+2]^p} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{[(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p}{(l^2 + s)^p [(l+1)^2 + s]^p} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 1]^p} \\ = \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 2]^p}.$$

考虑函数 $f(x) = x^r (r > 1)$. 当 $x > y > 0$ 时, 由微分学中值公式, 有

$$x^r - y^r = r\xi^{r-1}(x-y) \geq ry^{r-1}(x-y),$$

其中 $y < \xi < x$.

于是, 令 $r = 2p, x = \sqrt{(l+1)^2 + s}, y = \sqrt{l^2 + s}$,

则当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} & [(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p \\ &= (\sqrt{(l+1)^2 + s})^{2p} - (\sqrt{l^2 + s})^{2p} \\ &\geq 2p \cdot (\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \{ \sqrt{(l+1)^2 + s} - \sqrt{l^2 + s} \} \\ &= 2p (\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \cdot \frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2 + s} + \sqrt{l^2 + s}} \\ &\geq \frac{2pl^{2p-1}(2l+1)}{2\sqrt{l^2 + 4l + 1}}, \end{aligned}$$

从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_l - v_{l+1} &\geq \frac{pl^{2p-1}(2l+1)^2}{(l^2 + 4l + 1)^{2p+\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(l^2 + 4l + 2)^p} \\ &\geq \frac{2l^{2p-1}(l^2 + l + \frac{1}{4})}{(l^2 + 4l + 1)^{2p+\frac{1}{2}}} \\ &\quad \cdot \left[2p - \frac{(l^2 + 4l + 1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2 + l + \frac{1}{4})} \right]. \end{aligned}$$

由于 $2p > 1$, 而

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{(l^2 + 4l + 1)^{p + \frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2 + l + \frac{1}{4})} = 1,$$

故当 l 充分大时, $v_l - v_{l+1} > 0$.

于是存在 l_0 , 使当 $l \geq l_0$ 时, v_l 是单调下降的叙列. 又当 $n \in A_l, p > 0$ 时有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{l^{2p}},$$

故

$$\frac{2l+1}{(l+1)^{2p}} < v_l \leq \frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, v_l 是单调下降且趋于零的叙列 (当 $l \rightarrow +\infty$), 从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_l = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l v_l$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 仅为

条件收敛. 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 绝对收敛. 当 $p \leq \frac{1}{2}$

时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其

部分和为 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, 又记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $\sigma_M =$

$\sum_{n=1}^M u_n$. 那末任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间, 即有

$$|S_N - \sigma_M| \leq |\sigma_{M+1} - \sigma_M|.$$

注意, 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 而当 $p > 1$

时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 此时记其和为 σ , 则有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma.$$

因此,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma,$$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有同样的收敛结论. 从而当

$\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛; 当 $p > 1$ 时绝对

收敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散 (否则这时的 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛), 其中

当 $p = 1$ 时就是 2672 题.

2688.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,

我们引进集合

$$A_k = \{n \mid [\ln n] = k\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

那末集合 A_k 内的元素 n 具有性质

$$k \leq \ln n < k+1,$$

或写成

$$e^k \leq n < e \cdot e^k$$

其个数 $p_k = [(e-1)e^k]$. 将 A_k 内的元素从小到大排列, 可记为

$$n_k, n_k+1, \dots, n_k+p_k-1.$$

现考虑

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{n \in A_k} a_n = \sum_{n \in A_k} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n} \\ &= (-1)^k \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = (-1)^k v_k, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = \sum_{v=0}^{p_k-1} \frac{1}{n_k+v} \geq \sum_{v=0}^{p_k-1} \frac{1}{e \cdot e^k} \\ &= \frac{p_k}{e \cdot e^k} = \frac{1}{e \cdot e^k} [(e-1)e^k] \\ &\geq \frac{1}{e \cdot e^k} \frac{1}{2} (e-1)e^k = \frac{e-1}{2e}. \end{aligned}$$

下面我们证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的, 采用反证法, 假设

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由哥西准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0 ,

使当 $n \geq N_0$ 时, 对于一切自然数 p , 均有

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

今取 $\varepsilon = \frac{e-1}{4e} > 0$, 对于由此 ε 所找到的 N_0 , 在

$n \geq N_0$ 中选一数 n_k , 此处 k 是适当大的一个自然数, 有

$n_k \in A_k$, 即

$$e^k \leq n_k < e \cdot e^k.$$

又取自然数 $p = p_k - 1$, 则此时应有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+p_k-1}| < \varepsilon. \quad (1)$$

但另一方面却有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_k+p_k-1}|$$

$$= |u_k| = v_k \geq \frac{e-1}{2e} = 2\varepsilon > \varepsilon. \quad (2)$$

(1)式与(2)式矛盾. 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

$$2689. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

$$\text{解 设 } a_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

当 $p \leq 0$ 时, 显然 $|a_n| \geq 1$, 故 a_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当 $0 < p \leq 2$ 时, 记 $a_n = (-1)^{n-1} b_n$, 其中

$$b_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p < 1$ 易知

$$b_n > \left[\frac{2n+1}{2(n+1)} \right]^p b_n = b_{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

且有 (见第 10 题的不等式)

$$0 < b_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^p \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故由莱布尼兹判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但由 2598

题的结果知, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 于是,

当 $0 < p \leq 2$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p > 2$ 时, 由 2598 题的结果知, 原级数绝对收敛.

$$2690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n \cdot \sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零, 且

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [\cos n(n-1) - \cos n(n+1)] \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos N(N+1)] \right| \leq 1, \end{aligned}$$

有界 ($N=1, 2, \dots$), 故由迪里黑里判别法知级数收敛.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散. 现用反证法, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0,$$

于是, $\sin^2(n^2) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由 $\sin^2(n^2) + \cos^2(n^2) = 1$ 知 $\cos^2(n^2) \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由于

$$\begin{aligned} \sin(n+1)^2 &= \sin(n^2 + 2n + 1) \\ &= \sin n^2 \cos(2n+1) + \cos n^2 \sin(2n+1), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\cos^2(n^2) \sin^2(2n+1) \\ &= [\sin(n+1)^2 - \sin n^2 \cos(2n+1)]^2. \end{aligned}$$

让 $n \rightarrow \infty$, 注意 $\sin n^2 \rightarrow 0$, 于是, 由

$$\sin(n+1)^2 \rightarrow 0 \text{ 及 } \cos^2(n^2) \rightarrow 1.$$

便有 $\sin^2(2n+1) \rightarrow 0$, 因此 $\sin(2n+1) \rightarrow 0$. 同理

可得 $\sin(2n-1) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$). 又从

$$\sin(2n+1) + \sin(2n-1) = 2\sin 2n \cos 1$$

知还有 $\sin 2n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 即有

$$\sin m \rightarrow 0 \quad (\text{当 } m \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

从而也有 $\sin^2 n \rightarrow 0$ 及 $\cos^2 n \rightarrow 1$. 但

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n \sin^2 1 = [\sin(n+1) - \sin n \cos 1]^2.$$

让 $n \rightarrow \infty$, 于上式的两端取极限, 并注意到 $\sin^2 1 \neq 0$, $\cos^2 n \rightarrow 1$, 从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$$

不真, 即原命题 $\sin n^2 \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 成立. 因此, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2 \text{ 发散.}$$

2692. 设

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ 及当 $x \geq n_0$ 时,

$$|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q| > 0.$$

$$\text{研究级数 } \sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q - p > 1$ 即当 $q > p + 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} |R(n)| &= \left| \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \cdots + a_p n^{-p}}{b_0 n^{q-p} + b_1 n^{q-p-1} + \cdots + b_q n^{-p}} \right| \\ &\sim \frac{|a_0|}{|b_0| n^{q-p}}, \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 绝对收敛.

当 $q \leq p+1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} |R(n)|$ 发散.

但当 $p < q$ 时, $(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$,
容易验证原级数符合莱布尼兹判别法的条件, 故当
 $p < q \leq p+1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p \geq q$ 时, 显见 $R(n) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数
 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots$

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 显然级数绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 显然级数并非绝对收敛, 但由
莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此, 当 $0 < p = q \leq 1$ 时,
级数条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 由于通项不趋
于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 故级数发散.

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$

解 当 $p > 1$ 时, 由于原级数是由绝对收敛的级数
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的, 因此它也是绝
对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0 < p < 1$ 时, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中

$$u_n = \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(4n)^p(1-\frac{3}{4n})^p} + \frac{1}{(4n)^p(1-\frac{1}{4n})^p} - \frac{1}{(2n)^p} \\
&= \frac{1}{(4n)^p} \left[1 + \frac{3p}{4n} + 1 + \frac{p}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\
&= \frac{1}{2^p(2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\
&= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1 \right) + \frac{4p}{(4n)^{p+1}} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \tag{1}
\end{aligned}$$

由第一项组成的级数发散到 $+\infty$,而由其余各项分别组成的级数均收敛.因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.易证原级数与

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散(这可用部分和作比较而得),从而当 $0 < p < 1$ 时,原级数发散.

当 $p=1$ 时,(1)式第一项为零,而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛,故当 $p=1$ 时,原级数收敛,并且显然不是绝对收敛的,即原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时,原级数显然发散.

2695. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$

解 易证原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散,其中

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} \\
&= \frac{1}{2^p(2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(2n)^p} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2n})^p} \\
& = \frac{1}{(2n)^p} (\frac{1}{2^{p-1}} - 1) + \frac{1}{2^p} (\frac{p}{2^p} - \frac{p}{2}) \\
& \quad \cdot \frac{1}{n^{p+1}} + O(\frac{1}{n^{p+2}}). \tag{1}
\end{aligned}$$

当 $p > 1$ 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p < 1$ 时, 由(1)式第一项组成的级数发散, 而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛.

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 从而当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p = 1$ 时, 原级数条件收敛. 事实上, 此时(1)式中第一项及第二项均为零, 而由第三项所组成的级数收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而原级数收敛. 但级数

$$1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \dots$$

是发散的.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

2696. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots$

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 记 $\delta = \min(p, q) > 1$. 由于级数

$$1 + \frac{2}{2^q} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots \tag{1}$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N \leq \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^\delta} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\delta} < +\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界, 从而 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ 存在. 于是, 原级数当 $p > 1, q > 1$ 时绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由于级数(1)的 S_N 有

$$S_N \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \text{ (当 } N \rightarrow +\infty \text{ 时),}$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 可考虑

级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, 其中

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{(3k)^p} + \frac{1}{(3k+1)^p} - \frac{2}{(3k+2)^p} \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k}\right)^{-p} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right)^{-p} \right] \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[\frac{p}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[\frac{p}{3k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\ &= \frac{2p}{(3k)^{p+1}} + \frac{2p}{(3k+1)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) \\ &= \frac{3p}{(3k)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right). \end{aligned}$$

因此, 显然 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) +$

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 原级数显然发散.

2697. 证明: 级数

$$(a) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots,$$

$$(6) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

在区间 $(0, \pi)$ 内不绝对收敛.

$$\begin{aligned} \text{证 (a)} \quad \left| \frac{\sin nx}{n} \right| &\geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛 (这是因为 $\frac{1}{2n}$

单调趋于零, 且 $\sum_{n=1}^N \cos 2nx$ 有界, 故由迪里黑里判别法

即获证), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

(6) 可用 (a) 的方法证明. 事实上, 由

$$\left| \frac{\cos nx}{n} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的.

因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

2698. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出: (a) 绝对收敛域; (6) 非绝对收敛域.

解 当 $p > 1$ 时, 由于

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} \quad (0 < x < \pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故这两个级数当 $p > 1$ 时, 对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零, 且部分和 $\sum_{n=1}^N \cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^N \sin nx$ 均有界 ($0 < x < \pi$), 故由迪里黑里判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散, 事实上,

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时均发散. 因此, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值, 级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 两级数显然发散.

总之, 当 $0 < x < \pi$ 时, 两级数的 (a) 绝对收敛域为 $p > 1$; (b) 条件收敛域为 $0 < p \leq 1$.

2699. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^q}$$

定出: (a) 绝对收敛域; (σ) 条件收敛域.

解 记 $a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^q}$. 为研究级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的绝对收敛性, 可考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中

$u_n = |(-1)^{n-1} a_n| = a_n$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+1+p} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^q \\ &= \left(1 - \frac{p}{n+1+p} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \\ &= \left[1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p+1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \\ &\quad \cdot \left[1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \\ &= 1 + \frac{q-p}{n} + \Delta_n, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_n = \left[\frac{1}{2} q(q-1) - pq + p(p+1) \right] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故由高斯判别法知: 当 $q > p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而

原级数绝对收敛. 当然 $p = -1, -2, \dots$ 时原级数也绝

对收敛. 当 $q \leq p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 从而原级数并不

绝对收敛. 但当 $p < q \leq p+1$ 时原级数是条件收敛的.

因为当 n 足够大时, 易见 $a_n > a_{n+1}$, 即 a_n 单调下降. 记

$q = p + \varepsilon, \varepsilon > 0$, 则

$$a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^{p+\epsilon}},$$

取对数,有

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{p}{k}\right) - (p+\epsilon)\ln n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{p}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) - (p+\epsilon)\ln n \\ &= p\ln n + pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - p\ln n - \epsilon\ln n \\ &= pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - \epsilon\ln n \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow +\infty$ 时),

其中 r 及 A_1 为某些常数,从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 由莱布尼兹

判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. 因此,当 $p < q \leq p+1$ 时,原级数条件收敛.

当 $q = p$ 时,有

$$\ln a_n = pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow pr + A_1 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{pr+A_1} \neq 0$, 原级数发散.

当 $q < p$ 时,对于足够大的 n 有 $a_n < a_{n+1}$, 可见通项也不趋于零,故原级数也发散.

总之,(a)级数的绝对收敛域为 $q > p+1$;

(6)级数的条件收敛域为 $p < q \leq p+1$.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$$

的收敛性,其中 $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

解 记 $a_n = \binom{m}{n}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \left| \frac{n+1}{m-n} \right| \\ &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{m}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \right| \\ &= 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故由高斯判别法知: 当 $m+1 > 1$ 即当 $m > 0$ 时, 级数绝对收敛. 当 $m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时, 级数每一项为零, 因此, 级数显然绝对收敛.

下面我们证明: 当 $-1 < m < 0$ 时, 级数收敛, 从而知级数条件收敛. 事实上, 当 n 足够大之后, 易见

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{m}{n} \text{ 为交错级数. 又因 } -1 < m < 0, \text{ 故 } \left| \frac{m-n}{n+1} \right| < 1,$$

它等价于 $|a_{n+1}| < |a_n|$, 这表明级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 为此, 取对数, 有

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &= \ln \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \right| \\ &= \ln \left| \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right). \end{aligned}$$

由于当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\ln(1 - \frac{m+1}{k}) / (-\frac{m+1}{k}) \rightarrow 1$,

而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{m+1}{k})$ 发散到 $-\infty$.

∞ . 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

当 $m \leq -1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $m \geq 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 绝对收敛; 当

$-1 < m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 条件收敛.

2701. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

则可否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛?

解 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛. 但当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定都是正

项级数时, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收敛的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$

却是发散的. 事实上, 它是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及发

散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 相加而得的, 故它是发散的.

2702. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛的级数及

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2},$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

证 首先注意, 非绝对收敛即条件收敛, 若级数发散, 本命题不一定成立. 例如, 取 $a_i = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 0$; 若

$a_i = 1$ (当 $i = 1(\bmod 2)$ 时) 或 $a_i = -\frac{1}{2}$ (当 $i = 0(\bmod 2)$

时), 此时将有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \frac{1}{2}$, 等等,

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, 有

$$\frac{N_n}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| - \sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|} = 0,$$

从而即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. 证明: 对于每一个 $p > 0$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先, 由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \cdots \\ + \left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right]$$

中每一个括号内的数大于零, 故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调上升的数列. 又因

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} \right) - \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p} \right) - \dots \\ - \left[\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} \right] - \frac{1}{(2n)^p} < 1,$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的叙列. 从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p > 0$ 时是收敛的, 故对于叙列 $\{S_{2n}\}$, 它的极限与级数的和相等, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq 1 \quad (p > 0)$$

(对于 $p=1$, 此级数的和为 $\ln 2$).

其次, 我们证明此和不少于 $\frac{1}{2}$, 仍考虑前 $2n$ 项的部分和 S_{2n} , 则有 $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2n}$, 其中

$$\tilde{S}_{2n} = \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \right] \\ = \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0 < \theta_k < 1$ ($k=2, 3, \dots, n$). 由于 $p > 0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}} \geq \frac{1}{(2k)^{p+1}} \quad (k=2, 3, \dots).$$

即得

$$\tilde{S}_{2n} \geq \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k)^{p+1}} = \frac{p}{2^{p+1}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{p+1}} \\ \geq \frac{p}{2^{p+1}} \left[\int_2^n \frac{dx}{x^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+1}} \right] \\ = \frac{1}{2^{p+1}} \left[-\frac{1}{px^p} \Big|_2^n + \frac{1}{n^{p+1}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}} \\
&= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2p+1}} + \triangle_n,
\end{aligned}$$

此处

$$\triangle_n = \frac{-1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}.$$

于是, 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N_0 , 使当 $n \geq N_0$ 时, 有 $|\triangle_n| < \epsilon$. 这时有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2n} \geq 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} - \epsilon.$$

但当 $p > 0$ 时,

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2},$$

这是因为

$$2^p + \frac{1}{2^p} > 2,$$

故得

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} > \frac{2}{2^p} \text{ 或 } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2^p}.$$

从而

$$S_{2n} > \frac{1}{2} - \epsilon,$$

故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \geq \frac{1}{2} - \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即得 $S \geq \frac{1}{2}$. 综上所述,

$$\frac{1}{2} \leq S \leq 1.$$

2704. 证明:若把级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各项重新安排,而使挨次 p 个正项的一组与挨次 q 个负项的一组相交替,则新级数的和为

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

证 按题意,我们欲证

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} \\ & + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \dots \\ & = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}. \end{aligned} \quad (1)$$

首先,我们有

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \epsilon_n,$$

其中 C 为尤拉常数,而 ϵ_n 为无穷小,由此即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} &= \frac{1}{2} H_m = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \epsilon_m, \\ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} &= H_{2k} - \frac{1}{2} H_k \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{C}{2} + \epsilon_{2k} - \frac{1}{2} \epsilon_k. \end{aligned}$$

于是,若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来,考虑

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} \\ &+ \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2(n-1)q} + \frac{1}{2(n-1)p+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + \frac{1}{2np-1} \\
& = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2np}{2(n-1)q} + \alpha_n \\
& = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \alpha'_n,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n \rightarrow 0, \alpha'_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$); 又因 $S_{2n+1} = S_{2n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \ln 2$. 从而级数(1)的和为 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

2705. 证明: 若将调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

之项的符号改变使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项 ($p \neq q$), 但不变更原来的顺序, 则此级数始终是发散的. 仅当 $p = q$ 时为收敛的.

证 若 $p \neq q$, 不妨设 $p > q$, 记

$$\begin{aligned}
a_k = & \frac{1}{(p+q)k+1} + \cdots + \frac{1}{(p+q)k+p} \\
& - \frac{1}{(p+q)k+p+1} - \cdots - \frac{1}{(p+q)k+p+q}.
\end{aligned}$$

由于其中正项的项数比负数的项数为多, 且所有正项中任一项均比任一负项的绝对值为大, 故有

$$a_k > \frac{1}{(p+q)k+1} > 0 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

但 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散, 故 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 发散, 从而比较一下即知所得级数发散 (若 $p < q$ 同理可证).

若 $p = q$, 记

$$b_k = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \cdots + \frac{1}{kp+p} \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

考虑 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$. 显然 $b_k > 0, b_k > b_{k+1} (k=0,1,2,\cdots)$, 且 $b_k \rightarrow 0$ (当 $k \rightarrow \infty$ 时), 故由莱布尼兹判别法知级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 收敛. 易见所得级数与级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 同时收敛或同时发散. 因此, 当 $p=q$ 时, 所得级数收敛.

§ 3. 级数的运算

二级数的和与积 我们定义:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n);$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

式中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 则等式(a) 非仅有形式上的意义,

而等式(b) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛, 并且其中最有一个是绝对收敛的, 则也有同样的意义.

2706. 若两个级数, (a) 一个收敛, 而另一个发散; (b) 两个级数都发散, 问这两个级数的和可以说成什么?

解 (a) 一定发散. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 如果

其和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛, 得出矛盾. 于是, 此时两级数的和一定发散.

(6) 可为收敛, 可为发散. 例如:

(1) 设 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均

发散, 但 $c_n = 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,

(2) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $c_n = \frac{2}{n}$. 显见, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

均发散.

2707. 求二级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

解 两级数显然是收敛的. 因此, 它们的和也是收敛的. 逐项相加, 即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和:

2708. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right].$

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的, 因此它是收敛的, 且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

2709. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$

解 原级数显然绝对收敛, 记其和为 S , 则有

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1.$$

设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成三类:

$$A_1 = \{n \mid n=3k, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n \mid n=3k+1, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_3 = \{n \mid n=3k+2, k=0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} &= \sum_{n \in A_1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\ &+ \sum_{n \in A_2} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_3} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}} \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2^2} \cos(\pi + \frac{\pi}{3})\right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^k \end{aligned}$$

$$= (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7},$$

以上计算是合理的, 因为上述三个级数均绝对收敛, 故其和为 $\frac{5}{7}$. 从而知原级数的和为

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1 \\ &= \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}. \end{aligned}$$

2710⁺. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (|xy| < 1).$

解 设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成二类:

$$A_1 = \{n | n=2k, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n | n=2k+1, k=0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} &= \sum_{n \in A_1} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \\ &\quad + \sum_{n \in A_2} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}. \end{aligned}$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛, 故原级数收敛, 且其和为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} &= \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \\ &= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

2711. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

证 此两级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 其中

$$a_n = \frac{1}{n!}, b_n = \frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0 \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

当然, 由 e 的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1},$$

从而也就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e \cdot e^{-1} = 1.$$

2712. 证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1).$$

证 由 $|q| < 1$ 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 故可写成

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

其中

$$c_n = \sum_{i=0}^n q^i \cdot q^{n-i} = q^n \cdot \sum_{i=0}^n 1 = (n+1)q^n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

因此,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

2713. 证明: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

证 如果此级数的平方收敛, 则可写其积为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1}.$$

由于括号中的每一项都大于 $\frac{1}{n}$ ^{*}), 故 $|c_n| > 1$, 这与级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛相矛盾. 因此, 级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})^2$ 发散.

*) 只要证 $k(n-k+1) < n^2$ 或 $n^2 - nk + k^2 - k > 0$. 由于

$$n^2 - nk + k^2 - k = (n - \frac{k}{2})^2 + \frac{3k^2 - 4k}{4},$$

故只要证 $3k^2 - 4k > 0$. 但 $3k^2 - 4k = 3k(k - \frac{4}{3})$, 可见对于 $k = 2, 3, \cdots$ 上式成立. 至于当 $k = 1$ 时, 显然有 $1 \cdot (n - 1 + 1) = n \leq n^2$ 或 $\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n - k + 1) < n^2$ 成立.

2714. 证明: 下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} (\alpha > 0) \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} (\beta > 0)$$

的积当 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛级数, 而当 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散级数.

证 记

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

按乘法法则应有

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^\beta} \right] \\
 &= (-1)^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i+j=n+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta} = (-1)^{n-1} d_n,
 \end{aligned}$$

其中

$$d_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(1) 当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 d_n &\geq \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\
 &\geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-i+1)^\beta} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \sum_{\frac{n}{2} < j \leq n} \frac{1}{j^\beta} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{dt}{t^\beta} \\
 &= 2^\alpha \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}} \right) n^{1-(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

于是, 当 $\alpha + \beta < 1$ 时, $d_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时); 当 $\alpha + \beta = 1$ 时, $d_n \geq 2^\alpha \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}} \right) > 0$, 即当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时, d_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而知

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d_n$$

为发散级数.

(2) 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 d_n &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2} \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_1 + \sum_2,$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_1 &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\ &\leq \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^\beta} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^\beta} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(n^{-\beta} - \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right) \\ &= O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}),\end{aligned}$$

同理有

$$\sum_2 \leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}).$$

由于 $\alpha > 0, \beta > 0, 1 - (\alpha + \beta) < 0$, 故有 d_n 趋于零:

$$\begin{aligned}d_n &\leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \rightarrow 0 \\ &\quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).\end{aligned}$$

记 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}, B_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta}.$$

今考察下列差数

$$\begin{aligned}\Delta_n &= A_n B_n - S_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right) - S_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^a j^\beta} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\
&\quad - \sum_{\substack{2 \leq i+j \leq n+1 \\ 1 \leq i, j \leq n}} \left(\frac{(-1)^a}{i^a} \right) \left(\frac{(-1)^j}{j^\beta} \right). \\
&= \sum_{s=1}^{2n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{(-1)^{s+1}}{i^a j^\beta} - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{(-1)^{k-1}}{i^a j^\beta} \\
&= \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{s-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{1}{i^a j^\beta}.
\end{aligned}$$

为估计上述差数各项,可看下列乘法表(图 5.1). $A_n B_n$

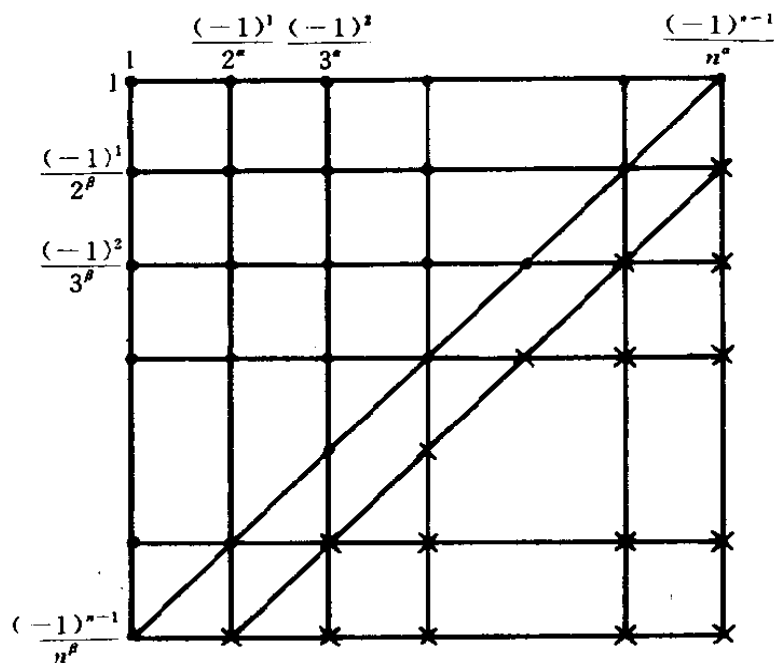


图 5.1

表示下列乘法表正方形各交点上乘积的全部和,而 S_n 表示下列乘法表对角线左上角各交点上乘积项(圆点号处的乘积项)的总和. 于是,剩下的差数实指下列乘法表对角线的右下部分各交点处乘积项(打×号处的乘积项)的总和.

于是有

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \left\{ \frac{(-1)^1}{2^\alpha} + \frac{(-1)^2}{3^\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right\} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^\beta} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{(-1)^2}{3^\alpha} + \frac{(-1)^3}{4^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right\} \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^1}{2^\beta} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \right\}.\end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned}|\Delta_n| &= \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \\ &\leq \frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\beta} \cdot \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \\ &= \sum_{\substack{i+j=n+2 \\ 2 \leq i, j \leq n}} \frac{1}{j^\beta i^\alpha} \leq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i+j=n+2}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta}\end{aligned}$$

$$= d_{n+1}.$$

由前已证:当 $\alpha + \beta > 1$ 时, $d_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故有 $\Delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n B_n - \Delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right), \end{aligned}$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha > 0, \beta > 0$, 按莱布尼兹判别法获得的。于是, 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} (\alpha > 0) \text{ 与级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} (\beta > 0) \text{ 的积 } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ 为收敛级数。}$$

2715. 验证下面二发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \text{ 和 } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

的积是绝对收敛级数.

$$\text{证 记 } 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m,$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m,$$

其中

$$u_1 = 1, u_2 = -\frac{3}{2}, u_3 = -\left(\frac{3}{2} \right)^2, \dots, u_m = -\left(\frac{3}{2} \right)^{m-1} \quad (m=2, 3, \dots),$$

$$v_1 = 1, v_2 = 2 + \frac{1}{2^2}, v_3 = \frac{3}{2} \left(2^2 + \frac{1}{2^3} \right), \dots, v_m = \left(\frac{3}{2} \right)^{m-2}$$

$$\left(2^{m-1} + \frac{1}{2^m} \right) \quad (m=2, 3, \dots).$$

因此 $c_1 = u_1 v_1 = 1$. 一般地, 在

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

中, 按乘积定义有

$$\begin{aligned} c_n &= u_1 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \\ &\quad \cdot \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \cdots + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right] \\ &\quad \cdot \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[(2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \cdots \right. \\ &\quad \left. - 2 - 2^0) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right) + \left[\frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right] \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{3}{2^n} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§ 4. 函数项级数

1° 收敛域 使函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

收敛的 x 值的总体 X 叫做此级数的收敛域, 而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X)$$

称为级数的和.

2° 一致收敛性 对于函数叙列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

如果: 1) 存在有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (a < x < b);$$

2) 对于任何的数 $\epsilon > 0$ 可以确定 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $a < x < b$ 时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

成立, 则称这函数叙列在区间 (a, b) 内为一致收敛. 此种情形写:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

若函数项级数(1)的部分和叙列:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在区间 (a, b) 内一致收敛, 则称(1)在此已知区间内为一致收敛.

3° 哥西判别准则 级数(1)在已知区间 (a, b) 内一致收敛的充分而且必要的条件为: 对于每一个 $\epsilon > 0$, 有数 $N = N(\epsilon)$ 存在, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \epsilon \quad (a < x < b)$$

成立.

4° 外耳什特拉斯判别法 对于级数(1), 若有收敛的数项级数

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (2)$$

存在, 使对于 $a < x < b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则级数(1)在区间 (a, b) 内绝对并一致收敛.

5° 亚伯耳判别法 如果:1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛; 2) 函数 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 全体是有界的并对每一个 x 形成一单调的叙列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

于区间 (a, b) 内一致收敛.

6° 迪里黑里判别法 如果 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的; 2) 叙列 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 对于每一个 x 都是单调的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 (a, b) 内一致地趋于零, 则级数 (3) 在区间 (a, b) 内一致收敛.

7° 函数项级数的性质 (a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(6) 若函数项级数 (1) 在区间 (a, b) 内一致收敛且有有穷的极限 $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n (n = 1, 2, \dots)$, 则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 2) 下之等式成立:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\lim_{x \rightarrow a} u_n(x)].$$

(B) 若收敛级数 (1) 的各项当 $a < x < b$ 时皆可微分并且导函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(Γ) 若级数 (1) 的各项连续, 并且此级数在有穷区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

一般说来, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$, 则公式 (4) 为真, 这里

$R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. 这个最后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的(绝对的和条件的)收敛域.

$$2716. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

解 令 $\frac{1}{x} = y$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为 1. 因此, 仅当

$|y| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 即 $|x| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n}{2n-1} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right|} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ 即 $(1-x)^2 < (1+x)^2$ 或 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, 显见它为条件收

敛. 当 $x < 0$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

$$2718. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$ 即 $x^2 < 4x^2 + 4x + 1$ 或

$$(3x+1)(x+1) > 0 \quad (1)$$

时,级数绝对收敛,解不等式(1),得

$$x > -\frac{1}{3} \text{ 或 } x < -1,$$

即为所求的绝对收敛域. 当 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = -1$ 时,原级数通项不趋于零,故发散.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ 时,级数绝对收敛. 解此不等式:

$$4x^2 < 1 + 2x^2 + x^4, (x^2 - 1)^2 > 0,$$

即 $|x| \neq 1$. 于是,当 $|x| \neq 1$ 时,级数绝对收敛.

当 $x = -1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由

2689 题的结果知它是条件收敛的.

当 $x = 1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 仍由同题的

结果知它是发散的.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3^2(n+1)} = \frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)| < \frac{2}{9}$ 时, 级数绝对收敛. 解此不等式:

$$-\frac{2}{9} < x(1-x) < \frac{2}{9}.$$

于是, x 的值应为

$$x^2 - x - \frac{2}{9} < 0 \text{ 及 } x^2 - x + \frac{2}{9} > 0$$

的公共部分, 也即

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{6} \text{ 及 } x > \frac{2}{3} \text{ 或 } x < \frac{1}{3}$$

的公共部分, 合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时, 级数显然发散.

2721. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛. 解之, 得

$$|x - k\pi| < \frac{\pi}{6} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{6}$ 时, 由绝对值组成的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{它是收敛的.}$$

因此, 当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 级数绝对收敛.

$$2722. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}.$$

解 当 $p > 1$ 及 $x \neq k$ ($k=-1, -2, \dots$) 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 及 $x \neq k$ ($k=-1, -2, \dots$) 时, 级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 级数发散.

$$2723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi).$$

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}} \leq \left| \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \right| \leq \frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q - p > 1$ 即 $q > p + 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $q \leq p + 1$ 时, 由绝对值组成的级数发散 (理由可参看 2698 题的题解).

当 $p < q \leq p + 1$ 时, 由于对 $0 < x < \pi$ 内任一固定的 x , $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ 有界, 且

$$\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

故级数收敛.

当 $q \leq p$ 时, 级数显然发散.

总之, 当 $q > p + 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $p < q \leq p + 1$ 时, 级数条件收敛.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (拉伯耳特级数).

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (\text{A}) \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (\text{B}).$$

当 $|x| < 1$ 时, 级数(B) 绝对收敛. 根据亚伯耳判别法, 以单调递减且有下界的因子 $\frac{1}{1-x^{2n}}$ 乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \quad (\text{B})$$

也收敛, 且为绝对收敛.

同理, 再以单调递减且有界的因子 x^n 乘级数(B) 的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$$

仍然收敛, 且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x| < 1$ 时绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, 级数(A) 显然无意义.

当 $|x| > 1$ 时, 级数(B) 显然发散. 下证级数(A) 也发散. 若不然, 当 $|x| > 1$ 时, 由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛, 再根据亚伯耳判别法, 我们就会推出级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n}$ 也收敛. 从而会得出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

也收敛, 这是错误的. 因此, 当 $|x| > 1$ 时, 级数(A) 发散.

2725. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n.$

解 记 $a_n = \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n = x^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$, 则当 $|x| > 1$ 时, 显然 $a_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, $|a_n| \rightarrow e^{\pm 1} \neq 0$ (当 $n \rightarrow \infty, x = \pm 1$ 时), 故级数也发散. 当 $|x| < 1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x| \cdot |1 + \frac{x}{n}|) = |x| < 1, \text{ 故级}$$

数绝对收敛.

2726. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有 $|a_n| \leq |x|^n$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 收敛, 故当 $|x| < 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, $|a_n| = \frac{1}{2}$, 它不趋于零, 故原级数发散.

当 $|x| > 1$ 时, 原级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}$.

由于 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, 再根据上面的讨论, 故原级数绝对收敛.

总之, 当 $|x| \neq 1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2727. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}.$$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|} = |x| < 1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x| > 1$ 时, 级数可写为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x| > 1$ 即 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ 时绝对收敛. 与 $|x| < 1$ 的情况一样, 得知级数(1)当 $|x| > 1$ 时绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 通项无意义. 但当 $x = 1$ 时, 原级数的通项 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 显然级数收敛.

总之, 当 $x \neq -1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2728. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = e^{-x},$$

故当 $x > 0$ 时, $e^{-x} < 1$, 级数绝对收敛. 而当 $x = 0$ 时, 级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 显然发散. 又当 $x < 0$ 时, $e^{-x} > 1$, 级数发散.

$$2729. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1 + a^{2n} x^2}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1 + a^{2n} x^2}$, 则当 $x = 0$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n},$$

故原级数发散. 当 $x \neq 0$ 时:

(1) 当 $|a| > 1$ 时, 有

$$0 < a_n < \frac{1}{a^{2n} x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2n},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2n}$ 的收敛性即知原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a| \leq 1$ 时, 有

$$|a_n| \geq \frac{1}{1 + x^2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{n},$$

故原级数发散.

$$2730. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}}) (x > 0).$$

解 记 $a_n = (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}})$.

(1) 当 $x=2$ 时, 显然 $a_n = 0 (n=1, 2, \cdots)$, 故级数绝

对收敛.

(2) 当 $x \neq 2$ 时, 注意 $x > 0$, 故有 $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$). 因此, 当 n 足够大时, a_n 不变号, 从而若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必绝对收敛. 今用阿拉伯判别法, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \right] = \ln x,\end{aligned}$$

故当 $\ln x > 1$ 即 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x < e$ 时, 原级数发散. 而当 $x = e$ 时, 此时有 (考虑当 n 足够大时)

$$\begin{aligned}\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 - (e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\ &= 1 + (e^{\frac{1}{n}} - 1) + O((e^{\frac{1}{n}} - 1)^2),\end{aligned}$$

但 $e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法, 原级数发散.

总之, 当 $x = 2$ 及当 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$

解 对于任意的 x , 只要 n 足够大, 该项就为正. 因此, 它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x,$$

故利用正项级数的判别法知:当 $x > 1$ 时,级数收敛,且为绝对收敛;当 $x \leq 1$ 时,级数发散.

$$2732. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} (x > 0, y > 0).$$

解 若 $x < 1$, 将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于

$$0 < \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} \leq x^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛,故原级数绝对收敛.

同理,当 $y < 1$ 时,原级数绝对收敛. 总之,当 $0 < \min(x, y) < 1$ 时,原级数绝对收敛.

$$2733. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n} (y \geq 0).$$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{n + y^n} (y \geq 0)$.

(1) 当 $|x| < 1$ 时, 易见

$$|a_n| \leq |x|^n (n = 1, 2, \dots).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x = 1$ 时, 1° 若 $y > 1$, 则由

$$|a_n| = \frac{1}{n + y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

易见原级数绝对收敛, 2° 若 $0 \leq y \leq 1$, 由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+y^n} \rightarrow 1 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

易见原级数发散.

(3) 当 $x = -1$ 时, 1° 若 $y > 1$, 由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数绝对收敛. 2° 若 $0 \leq y \leq 1$, 由

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数条件收敛.

(4) 当 $|x| > 1$ 时, 1° 若 $y = 0$, 则由

$$a_n = \frac{x^n}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数发散. 2° 若 $y > 0$, 则当 $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ 即 $|x| < y$ 时, 有

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} < \left|\frac{x}{y}\right|^n,$$

故原级数绝对收敛. 当 $\left|\frac{x}{y}\right| \geq 1$ 时, 若 $y > 1$, 有

$$|a_n| = \left|\frac{x}{y}\right|^n \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}} \rightarrow +\infty \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)};$$

若 $0 < y \leq 1$, 有

$$|a_n| > \frac{|x|^n}{n+1} \rightarrow +\infty \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

故当 $\left|\frac{x}{y}\right| \geq 1$ 时, 原级数发散.

总之, 当 $|x| < 1, 0 \leq y < +\infty$; 当 $|x| = 1, y > 1$ 及当 $|x| > 1, |x| < y$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x = -1, 0 \leq y$

≤ 1 时,原级数条件收敛.

$$2734. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2}} \\ &\quad \cdot (\max(|x|, |y|))^n \end{aligned}$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \max(|x|, |y|)$, 故当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时,级数绝对收敛;当 $\max(|x|, |y|) > 1$ 时,级数发散;当 $\max(|x|, |y|) = 1$ 时,由于 $a_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$),故级数发散.

$$2735. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} (x \geq 0).$$

解 (1) 当 $0 \leq x < 1$ 时,此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ 相比,它们具有相同的敛散性.事实上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1,$$

且这两个级数均为正项级数.对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}, \quad (1)$$

其通项 $\frac{x^n}{n^y} \leq n^{|y|} x^n = b_n (n=1, 2, \dots)$, 但因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = x < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,且为绝对收敛.因此,级数(1)绝对

收敛,从而原级数也是绝对收敛的.

(2) 当 $x = 1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$. 于是,当 $y > 1$ 时收敛,且为绝对收敛;当 $y \leq 1$ 时发散.

(3) 当 $x > 1$ 时,原级数的通项可写成

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} &= \frac{\ln x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y} \\ &= \frac{\ln x}{n^{y-1}} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y}. \end{aligned}$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1 > 1$ 即 $y > 2$ 时收敛,而当 $y \leq 2$ 时发散. 由上式右端第二项所组成的级数,利用 $0 < \frac{1}{x} < 1$ 及最初讨论的结果,得知它对任意的 y 值均收敛. 因此,原级数当 $x > 1, y > 2$ 时收敛,且为绝对收敛.

总之,当 $0 \leq x < 1, -\infty < y < +\infty$; 当 $x = 1, y > 1$ 及当 $x > 1, y > 2$ 时,原级数绝对收敛.

2736. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n} \right).$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n} \right) \right|} = |\operatorname{tg} x|,$$

故当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (其中 k 为整数) 时, $|\operatorname{tg} x| < 1$, 从而级

数绝对收敛. 而当 $|x - k\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ 时, 由于 tg^n

$\left(x + \frac{y}{n} \right) \rightarrow \infty$, 故级数发散.

2737. 证明:若劳郎级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ ($|x_1| < |x_2|$) 时收敛,则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

证 由于劳郎级数当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 时收敛,故级数

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛.于是,由(3)知,当 $|x| < |x_2|$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛.由(2)知,当 $\left| \frac{1}{x} \right| < \left| \frac{1}{x_1} \right|$ 即当 $|x_1| < |x|$ 时,级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛.因而,当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时,级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛,也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

解 考虑级数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

显然仅当 $|x| < 2$ 时,级数(1)收敛;仅当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时,级

数(2)收敛.因此,当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时,原级数收敛.

当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 记级数(1)的和为 $S_+(x)$, 级数(2)的和为 $S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = - S_+ \left(\frac{1}{x} \right).$$

今求 $S_+(x)$. 注意当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

均收敛, 且有

$$\begin{aligned} S_+(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2^{m+1}} x^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x}{2} S_+(x) + \frac{x}{2-x}, \end{aligned}$$

得

$$S_+(x) = \frac{\frac{x}{2-x}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{(2-x)^2}.$$

从而

$$S_-(x) = - \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\left(2 - \frac{1}{x} \right)^2} = - \frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n &= S_+(x) + S_-(x) \\
&= 2x \cdot \left[\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2x-1)^2} \right] \\
&= \frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}.
\end{aligned}$$

2739. 求牛顿级数的(绝对的与条件的)收敛域:

$$\begin{aligned}
(\text{a}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad (\text{b})^+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}; \\
(\text{B}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},
\end{aligned}$$

其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$.

解 (a) 由 2700 题的结果知: 当 $x \geq 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $-1 < x < 0$ 时, 级数条件收敛.

(b) 由于

$$\begin{aligned}
x^{[n]} &= x(x-1)\cdots[x-(n-1)] \\
&= (-1)^{n-1}(n-1-x)(n-2-x)\cdots(2-x)(1-x)x \\
&= -(-1)^{n-1}(n+t)(n-1+t)\cdots(3+t)(2+t)(1+t),
\end{aligned}$$

其中 $t = -(1+x)$, 故原级数可改写为

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}{n! n^p}.$$

利用 2699 题的结果知: 当 $p > t+1$ 即 $p > -x$ 时, 原级数绝对收敛. 当然, 当 $x=0, 1, 2, \cdots$ 时, 原级数也绝对收敛. 当 $t < p \leq t+1$ 即 $-(1+x) < p \leq -x$ 时, 原级数条件收敛.

(B) 令 $t = -(1+y)$, 则有

$$y^{[n]} = (-1)^n(1+t)(2+t)\cdots(n+t).$$

记 $a_n = \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然, 当 x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$

时, $a_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$. 于是, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 研究一

下 $y \neq k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 的情形, 有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= -\frac{n+1}{n+1+y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

(1) 当 $|x| < 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{n+1}{n-y} \right| \cdot \frac{1}{e|x|} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{|x|} > 1,\end{aligned}$$

故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|x| > 1$ 且 n 充分大时, 有 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 故 $a_n \nrightarrow$

0, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 当 $|x| = 1$ (考虑 n 足够大) 时, 有

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left[1 + \frac{1+y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 + \frac{1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

于是, 1° 当 $y > \frac{1}{2}$ 时, 由高斯判别法知, 此时级数绝对

收敛. 2° 当 $y \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 但当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时,

有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{x} \left[1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

其中 $0 < \mu < 1$. 显然, 当 $x = -1$ 时, a_n 不变号, 因此可看成正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数, 且当 n 足够大时,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外, 还有

$$\begin{aligned} |a_n| &= |y| = (1-y)(2-y)\cdots(n-1-y) \frac{e}{n^n} \\ &= e|y| \frac{1-y}{n} \frac{2-y}{n} \cdots \frac{n-1-y}{n} \frac{1}{n} < \frac{e|y|}{n} \rightarrow 0 \\ &\quad (\text{当 } n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由莱布尼兹判别法, 便知当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

总之, 当: (1) $|x| < 1, y$ 为任意数; (2) $|x| = 1, y > \frac{1}{2}$; (3) x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 原级数条件收敛.

2740. 证明: 若迪里黑里级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x = x_0$ 收敛, 则此级数当 $x > x_0$ 时也收敛.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 并

且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x > x_0$ 时单调下降趋于零, 故根据亚伯耳判

别法即知: 当 $x > x_0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

2741. 证明: 叙列 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0,$$

式中 $\gamma_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $f(x)$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 对于区间 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} \{\gamma_n(x)\} \leq \epsilon,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0.$$

再证充分性.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

于是, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 只要当 $n > N(\epsilon)$ 时, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $f(x)$.

2742. 叙列 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$). (a) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛;
(6) 在每一个有穷的区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 上一致收敛;
(B) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛是什么意思?

解 (a) 对于任意的 $\epsilon > 0$ 及任意的 $x_0 < x < +\infty$, 都存在一个正整数 $N = N(\epsilon, x)$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称叙列 $f_n(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛. 要注意的是, N 不仅与 ϵ 有关, 而且与值 x 有关.

(6) 对每一个 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$, 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N = N(\epsilon, a, b)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

则称 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(B) 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 都有正整数 $N = N(\epsilon)$ 存在 ($N(\epsilon)$ 仅与 ϵ 有关), 使当 $n > N$ 时, 对所有的 $x_0 < x < +\infty$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

2743. 对于叙列

$$f_n(x) = x^n (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

求出其项的最小号码 $N = N(\epsilon, x)$, 使从这项起叙列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设 $x =$

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$$

此叙列在已知区间 $(0, 1)$ 内是否一致收敛?

解 显见极限函数为零. 于是考虑

$$|x^n - 0| < \epsilon,$$

其中 $\epsilon = 0.001$. 当 $0 < x < 1$ 时, 上式即 $x^n < \epsilon$ 或 $n > \frac{\lg \epsilon}{\lg x}$, 故最小号码为 $N = \left\lceil \frac{\lg \epsilon}{\lg x} \right\rceil$.

当 $x = \frac{1}{10}$ 时, $N = 3$;

当 $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 时, $N = 6$;

.....

当 $x = \frac{1}{\sqrt[m]{10}}$ 时, $N = 3m$,

.....

下面研究此数列在 $(0, 1)$ 内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时, $\lg x$ 趋于零, 故

$$\frac{\lg \epsilon}{\lg x} \rightarrow +\infty \quad (0 < \epsilon < 1, x \rightarrow 1-0),$$

即 $\frac{\lg \epsilon}{\lg x}$ 无限增加. 因此, 不可能找到一个公共的 N (它仅与 ϵ 有关) 值, 使当 $n > N$ 时, 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 值, 皆有 $x^n < \epsilon$. 因此, 数列

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

在区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛.

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数的和之差小于 ϵ ? 设:

$$(a) \epsilon = 0.1; \quad (b) \epsilon = 0.01;$$

$$(\text{B})\epsilon=0.001.$$

求出 n 的数值来.

解 易证此级数收敛, 记其和为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 项, 其部分和为 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 欲使其误差 $\Delta_n(x) = |S(x) - S_n(x)|$ 小于 ϵ , 问项数 n 为若干? 可用下列估计法:

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \\ &= \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{|\sin kx|}{k(k+1)} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 也即当 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ 时就有 $\Delta_n(x) < \epsilon$.

记 $N_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\} - 1 = N_0 - (1 - \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\})$ 时, 即有 $\Delta_n(x) < \epsilon$, 其中 $\left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\}$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的零头部分. 也即可取

$$n = N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$$

均有 $\Delta_n(x) < \epsilon$. 所取的项数 N_0 与 ϵ 的关系, 按题设数值, 可有

ϵ	(a) 0.1	(б) 0.01	(в) 0.001
N_0	10	100	1000

2745⁺. 对怎样的 n , 不等式

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

能保证成立?

解 由台劳公式, 有

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| \\ &= \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$. 欲 $\Delta_n(x) < 0.001$, 只要

$$\frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1} < \frac{1}{1000}.$$

也即要求 n , 使

$$e^{10} 10^{n+4} < (n+1)!.$$

为此, 两边取对数, 有

$$10 + (n+4)\ln 10 < \sum_{k=2}^{n+1} \ln k = p_n. \quad (1)$$

注意到

$$p_n > \int_1^{n+1} \ln t dt = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

若能有

$$(n+1)\ln(n+1) > n(1+\ln 10) + 10 + 4\ln 10, (2)$$

就可保证(1)式成立,从而 $\Delta_n(x) < 0.001$. 为解(2)中的 n , 可用估算法, 例如当 $n = 39$ 时, (2) 式就成立, 故对于 n 取 39, 即取 39 项时就能保证 $\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 (0 \leq x \leq 10)$.

研究叙列在所示区间上的一致收敛性:

$$2746. f_n(x) = x^n; \quad (a) 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (b) 0 \leq x \leq 1.$$

解 (a) 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

任给 $\epsilon > 0$, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 即只要

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2}.$$

取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的一切 x

值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x) = x^n$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于零.

$$(b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x=1, \\ 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}; 0 \leq x \leq 1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时, $f_n(x)=0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{n+1} = g(x).$$

由于 $g'(x) = x^{n-1}[n - (n+1)x]$, 故若令 $g'(x) = 0$, 即求得 $x = \frac{n}{n+1}$. 显然, 当 $0 < x < \frac{n}{n+1}$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $\frac{n}{n+1} < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $x = \frac{n}{n+1}$ 达到 $[0, 1]$ 上的最大值. 于是, 对于 $0 \leq x \leq 1$, 有

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零.

2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}; 0 \leq x \leq 1$.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{2n}.$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{4} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2749. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}; 0 < x < +\infty$.

解 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n < \varepsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内一致收敛于零.

2750. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; 0 \leq x \leq 1$.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| \\ &= \frac{x+x^2}{1+n+x} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\epsilon}$. 取 $N =$

$\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - x| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 x .

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; (a) $0 \leq x \leq 1 - \epsilon$; (b) $1 - \epsilon \leq x \leq 1 + \epsilon$; (c) $1 + \epsilon \leq x < +\infty$, 其中 $\epsilon > 0$.

解 (a) 当 $0 \leq x \leq 1 - \epsilon$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < (1-\epsilon)^n.$$

任给 $\epsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$, 只要 $(1-\epsilon)^n <$

ϵ' , 即只要 $n > \frac{\lg \epsilon'}{\lg(1-\epsilon)}$. 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \epsilon'}{\lg(1-\epsilon)} \right\rceil$, 则当 $n > N$

时, 对于 $[0, 1-\epsilon]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1-\epsilon]$ 上一致收敛于零.

$$(6) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 1-\epsilon \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x=1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x \leq 1+\epsilon. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{3}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{3} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$ 上收敛而不一致收敛.

(B) 当 $1+\epsilon \leq x < +\infty$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{(1+\epsilon)^n}.$$

任给 $\epsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$, 只要 $\frac{1}{(1+\epsilon)^n} <$

ϵ' , 即只要 $n > \frac{\lg \frac{1}{\epsilon'}}{\lg(1+\epsilon)}$. 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \frac{1}{\epsilon'}}{\lg(1+\epsilon)} \right\rceil$, 则当 $n > N$

时, 对于 $x \geq 1+\epsilon$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 1| < \epsilon'.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1, +\infty]$ 上一致收敛于 1.

2752. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; (a) $0 \leq x \leq 1$; (b) $1 < x < +\infty$.

解 (a) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(b) 当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} < \frac{2}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\epsilon}$. 取 $N =$

$\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 1$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2753. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

解 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取

$N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2754. f_n(x) = n \left[\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right]; 0 < x < +\infty.$$

解 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[\left(x + \frac{1}{n} \right) - x \right]}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

若取 $x = \frac{1}{n}$, 则有

$$\begin{aligned} \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| &= \left| n \left[\sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right] - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}} \right| \\ &= \sqrt{n} \left| \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2} + 1)^2} > \frac{1}{18} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 它就可以大于指定的 $\epsilon_0 > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2755. (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; -\infty < x < +\infty;$

(b) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; -\infty < x < +\infty.$

解 (a) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$.

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(5) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{n\pi}{2}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right) - f\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2756. (a) $f_n(x) = \arctg nx; 0 < x < +\infty$; (5) $f_n(x) = x \arctg nx; 0 < x < +\infty$.

解 (a) 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg nx = \frac{\pi}{2} = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{\pi}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \arctg 1 - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

(5) 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= x \left| \arctg nx - \frac{\pi}{2} \right| \\ &= x \left| -\arctg \frac{1}{nx} \right| \\ &\leq x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$.

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

2757. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$.

解 当 $0 < x < 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < e^{-1}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = e^{n(1 - \frac{1}{n} - 1)} = e^{-1} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛而不一致收敛.

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; (a) $-l < x < l$, 其中 l 为任意的正数; (b) $-\infty < x < +\infty$.

解 (a) 当 $-l < x < l$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有 (当 $n > \lceil l \rceil$ 时)

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-(x-n)^2} \leq e^{-(n-l)^2}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, (可设 $\varepsilon < 1$), 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

只要 $n > \lceil l \rceil$ 且 $e^{-(n-l)^2} < \varepsilon$, 即只要 $n > l + \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

取 $N = \left\lceil l + \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $(-l, l)$

上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致收敛.

(6) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2759. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; 0 < x < 1.$

解 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$. 又 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right|.$$

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,

使当 $0 < t < \delta$ 时, 恒有 $|t \ln t| < \varepsilon$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil$,

则当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \delta$, 从而对一切 $0 < x < 1$, 都

有 $0 < \frac{x}{n} < \delta$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛.

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; (a) 在有穷的区间 (a, b) 上;

(6) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上.

解 (a) 当 $a < x < b$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \right\}^x = e^x = f(x).$$

记 $C = \max\{|a|, |b|\}$. 由台劳公式知

$$\begin{aligned}\ln f_n(x) &= n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\ &= n \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta x}{n} \right)^3} \cdot \frac{x^3}{n^3} \right],\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, $\left| \frac{\theta x}{n} \right| \leq \frac{c}{n}$, $|x^3| \leq c^3$, 故

$$\ln f_n(x) = x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是易知

$$f_n(x) = e^{x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^x \left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

取适当的 N_1 , 则当 $n > N_1$ 时, 就有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= e^x \left| -\frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \\ &\leq \frac{c^2 e^c}{n} \quad (a < x < b)\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > N_1$,

且 $n > \frac{c^2 e^c}{\varepsilon}$. 取 $N = \max\left\{N_1, \left\lceil \frac{c^2 e^c}{\varepsilon} \right\rceil\right\}$, 则当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

$$(5) |f_n(x) - f(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right|.$$

不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 2^n \left[\left(\frac{e}{2} \right)^n - 1 \right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\varepsilon > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2761. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1); 1 \leq x \leq a$.

解 当 $1 \leq x \leq a$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n \ln[1 + (x^{\frac{1}{n}} - 1)]| \\ &= \left| n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n(x^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + nO((x^{\frac{1}{n}} - 1)^3) \right| \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

其中 $A > 0$ 为常数, 上述不等式可在适当大的 N_1 取定后当 $n > N_1$ 时成立. 显然对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 N_2 , 使当 $n > N_2$ 时, $\frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2} < \epsilon$, 于是, 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[1, a]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1, a]$ 上一致收敛.

2762. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; 0 \leq x \leq 2$.

解
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \right|$$

$$= \frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{n};$$

(2) 当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\sqrt[n]{1+x^n} - x| \\ &= \frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + x \cdot (1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + x^{n-2} \cdot (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + x^{n-1}} \\ &< \frac{1}{nx^{n-1}} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

因此, 对于 $0 \leq x \leq 2$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 2]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一致收敛.

2763.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{若 } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right), & \text{若 } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{若 } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

解 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=0$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)=0$.

当 $x \neq 0$ 时, 在 $[0, 1]$ 上, $x > 0$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取适当大的正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 使 $\frac{2}{N} \leq x$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{2}{n}$

$< \frac{2}{N} \leq x$. 于是, $f_n(x) = 0$. 因此,

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n^2}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于区间 (a, b) 内的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$f_n(x) \xrightarrow{p} f(x) \quad (a < x < b).$$

证 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给的 $\epsilon > 0$, 若取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时,

对于一切 $x \in (a, b)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于 $f(x)$.

2765. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$,

且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

证明: 在闭区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上 (其中 $a < \alpha < \beta < b$),

$$f_n(x) \xrightarrow{p} f'(x).$$

证 考虑 $[\alpha', \beta']$, 其中 $a < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < b$.
 由于 $f_n(x)$ (n 充分大) 在 $[\alpha', \beta']$ 上有连续的导函数,
 故由微分学中值公式, 得

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = n f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

又因 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上连续, 所以 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于 $[\alpha', \beta']$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f'(x') - f'(x'')| < \varepsilon$. 今取 $N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1 = N(\varepsilon)$,

则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$.

于是, 对 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 x 值, 只要 N 足够大, 就可保证 x 与 $x + \frac{\theta}{n}$ 均属于 $[\alpha', \beta']$. 于是, 对于 $[\alpha, \beta]$ 上的一切值 x , 均有

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left| f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2766. 设 $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, 其中 $f(x)$ 为连续函数.

证明数列 $f_n(x)$ 在任何有穷闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

证 记 $f_n(x)$ 的极限函数为 $F(x)$, 则

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) \\
&\quad (0 < \theta_i < 1; i = 0, 1, \dots, n-1).
\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续, 故它在 $[a, b+1]$ 上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于 $[a, b+1]$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 今取 $N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1$, 则当 $n > N$, $a \leq x \leq b$ 时, 有 $\left| \left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \right) - \left(x + \frac{i}{n} \right) \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$ 且 $x + \frac{i}{n} \in [a, b+1]$, $x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \in [a, b+1]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

于是

$$\begin{aligned}
&|F(x) - f_n(x)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| \\
&< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (a) 在区间 $|x| < q$ 内, 此处 $q < 1$, (σ) 在区间 $|x| < 1$ 内.

解 (a) 由于 $|x^n| < q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛 ($0 < q < 1$), 故由

外耳什特拉斯判别法知,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q < 1$ 内绝对并一致收敛.

$$(6) S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \text{ 当 } |x| < 1 \text{ 时, 有}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) - S\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{n+1\sqrt{2}}} \right| > \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < 1$ 内收敛而不一致收敛.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 在闭区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上.

解 由于 $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上绝对并一致收敛.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$; 在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n(x) &= \sum_{k=0}^n (1-x)x^k \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

于是,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{若 } x = 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right); -1 \leq x \leq 1.$

解 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = x,$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

于是对任给的 $\epsilon > 0$, 若取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[-1, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}; 0 < x < +\infty.$

解 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

当 $0 < x < +\infty$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1.$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; 0 < x < +\infty.$

解 由于 $\left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| < \frac{1}{n^2} (x > 0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 原级数在 $(0, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)};$

(a) $0 \leq x \leq \epsilon$, 其中 $\epsilon > 0$; (b) $\epsilon \leq x \leq +\infty$.

解 当 $x=0$ 时, 显然级数收敛于零.

当 $x > 0$ 时, 令

$$u_n(x) = \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+(n+1)x} \right] = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 ($x \geq 0$). 易见, 此时

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$),

因此有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x=0; \\ 1, & \text{若 } x>0. \end{cases}$$

(a) 当 $x>0$ 时, 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0 < \epsilon_0 < 1$. 对于任意大 (但固定的) n , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = 1,$$

故可取 $0 < x_0 < \epsilon$, 使

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)} > \epsilon_0,$$

即

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| > \epsilon_0.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq \epsilon$ 上不一致收敛.

(6) 当 $x \geq \epsilon$ 及 $n \geq 3$ 时, 由于

$$|u_n(x)| = \left| \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{nx}{(1+x)^n} \\
&= \frac{nx}{1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots+x^n} \\
&< \frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3} \\
&= \frac{6}{(n-1)(n-2)x^2} < \frac{6}{(n-2)^2\epsilon^2},
\end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2\epsilon^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 原级数在 $[\epsilon, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2774. 利用外耳什特拉斯判别法, 证明下列函数项级数在所给区间内的一致收敛性:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, -\infty < x < +\infty;$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, -2 < x < +\infty;$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, 0 \leq x \leq +\infty;$

(Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, |x| < +\infty;$

(Д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, |x| < a, a \text{ 为任意正数};$

(Ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, |x| < +\infty;$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, |x| < +\infty;$$

$$(и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}}, |x| < +\infty;$$

$$(к) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n} \right), |x| < a;$$

$$(л) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(м) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3}, |x| < +\infty.$$

解 (a) 由于 $\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(б) 考虑 $n \geq 2$, 有 $\left| \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \right| < \frac{1}{2^n - 2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ($x > -2$). 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(в) 当 $x=0$ 时, 级数显然收敛于零. 当 $x > 0$ 时, $1 + n^4 x^2 \geq 2 n^2 x$, 于是 $\left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}$. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(г) 当 $|x| < +\infty$ 时, $1 + n^5 x^2 \geq 2n^{\frac{5}{2}} x$, 于是, $\left| \frac{nx}{1 + n^5 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$\frac{x}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(д) 当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时,

$$\left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \right| \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (|x|^n + |x|^{-n}) \\ \leq \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}.$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$, 应用达朗伯耳判别法, 当 $n \rightarrow \infty$

时, 有

$$\frac{\frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{2}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0 < 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$

当

$\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时一致收敛.

(e) 当 $n = 2m$ 或 $2m+1$ 时, $u_n(x) = \frac{x^n}{m!}$. 考虑

级数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x)$, 当 $|x| < a$ 时, 不论

$n = 2m$ 还是 $n = 2m+1$, 均有 $\left| \frac{x^n}{m!} \right| < \frac{a^n}{m!}$. 应用达朗

伯耳判别法易证级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m}}{m!}$ 及 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{2m+1}}{m!}$ 均收敛. 因

此, 级数 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m}(x)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty} u_{2m+1}(x)$ 当 $|x| < a$ 时绝对并

一致收敛. 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{[\frac{n}{2}]!}$ 当 $|x| < a$ 时一致收敛.

(ж) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(з) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(и) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(к) 当 n 充分大 (即 $n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < a$, 有

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right) = \frac{x}{n \ln^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当 $|x| < a$ 时, $\left| \frac{x}{n \ln^2 n} \right| \leq \frac{a}{n \ln^2 n}$, 而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a}{n \ln^2 n}$ 收敛*)

以及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 当 $|x| < a$ 时, 一致收敛.

*) 利用 2619 题的结果.

(л) 当 $x > 0$ 时, $e^{nx} > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} > \frac{n^2 x^2}{2}$, 故

$e^{-nx} < \frac{2}{n^2 x^2}$. 于是, $|x^2 e^{-nx}| < \frac{2}{n^2}$, 此式对 $x=0$ 也成

立. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 当 $0 \leq x < +\infty$ 时一致收敛.

$$(M) \text{ 由于 } x^2 + n^3 \geq 2n^{\frac{3}{2}} |x|, \text{ 故 } \left| \frac{x}{x^2 + n^3} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

当 n 充分大 ($n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < +\infty$, 有

$$\begin{aligned} \left| \arctan \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| &= \left| \frac{2x}{x^2 + n^3} + O\left(\left(\frac{2x}{x^2 + n^3} \right)^2 \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3} \right). \end{aligned}$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 均收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{x^2 + n^3}$

当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (a) 在闭区间 $\epsilon \leq x \leq 2\pi - \epsilon$ 上, 其中 $\epsilon > 0$;

(6) 在闭区间 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上.

解 (a) 当 $\epsilon \leq x \leq 2\pi - \epsilon$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\epsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x , 故由迪里黑里判别法知,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ 上一致收敛.

(6) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛*). 但它不

一致收敛, 这可用反证法获证. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上

一致收敛, 其中 $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($n=1, 2, \dots$),

则应有: 任给 $\epsilon > 0$, 例如取 $\epsilon = \frac{1}{4}$, 必存在 $N_1 = N_1(\epsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N_1$ 时, 对于 $[0, 2\pi]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 取 $N_2 \geq 2N_1$, 记 $n_0 = \max \left(\left\lfloor \frac{N_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N_2+1}{2} \right\rfloor \right)$, 则 $n_0 \geq N_1$, 又取 p 使 $n_0 + p = N_2 + 1$, 则应有

$$|u_{n_0+1}(x) + u_{n_0+2}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)| < \epsilon,$$

也即有

$$\left| \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} u_n(x) \right| < \epsilon = \frac{1}{4} \quad (x \in [0, 2\pi]). \quad (1)$$

今取 $x_0 = \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{\pi}{2}$, 当然上式(1)也应成立.

但是另一方面, 由于当 $\frac{N_2}{2} + 1 \leq n < N_2 + 2$ 时,

显然有 $0 < nx_0 < \frac{\pi}{2}$, 故有 $\sin nx_0 \geq nx_0 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{n}{N_2+2}$.

于是, $u_n(x_0) = \frac{\sin nx_0}{n} \geq \frac{1}{N_2+2}$, 从而有

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} u_n(x_0) &\geq \frac{1}{N_2+2} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} 1 \\ &\geq \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{1}{2}(N_2+2) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

它与(1)中当 $x = x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛而不一致收敛的结论.

*) 利用 2698 题的结果.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}; 0 < x < +\infty.$

解 记 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x} (n=1, 2, \dots)$, 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$|u_n(x)| \leq 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而收敛.

但它在 $(0, +\infty)$ 内并不一致收敛. 如若不然, 即设它一致收敛, 则对任给 $\epsilon > 0$, 例如取 $\epsilon = 1$, 必存在 $N = N(\epsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $(0, +\infty)$ 内的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 今取 $p = 1, n = N$, 则对于一切 $x \in (0, +\infty)$, 应有

$$|u_{N+1}(x)| < \epsilon = 1.$$

又取 $x_0 = \frac{2}{3^{N+1}\pi} \in (0, +\infty)$, 则也应有 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$. 但事实上却有

$$\begin{aligned} u_{N+1}(x_0) &= 2^{N+1} \sin \frac{1}{3^{N+1}x_0} = 2^{N+1} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 2^{N+1} > 1, \end{aligned}$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$ 矛盾. 证毕.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; 0 < x < +\infty.$

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$. 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$, 它单调一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0 < x < +\infty$ 时一致收敛.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}; 0 \leq x \leq 2\pi$.

解 当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时, 显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减, 同时由于 $0 < \frac{1}{n+\sin x} < \frac{1}{n-1}$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 故原级数在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}; |x| \leq 10$.

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| \leq 2$, 记 $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, 由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \rightarrow 0 \quad (|x| \leq 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $[-10, 10]$ 上一致收敛.

$$2780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

$$\text{解} \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2n\pi}{3} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi}{3} \right|} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ 又 } \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$$

对于每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是单调递减的, 且由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$, 故对每一个 x 一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解 当 $x = 2m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = 0.$$

当 $x \neq 2m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| &= |\sin x| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \\ &\leq |\sin x| \cdot \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\ &= 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2 \end{aligned}$$

于是, 对于一切 $x \in [0, +\infty]$, 均有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| \leq 2.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 关于 n 都是单调递减的, 且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x

在 $0 \leq x < +\infty$ 上一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解
$$\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}. \text{ 由于}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛*), 且与 x 无关, 故它对 x 而言是一致收敛的.

另一方面, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 都是

单调递增的且有界: $\left| \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right| \leq 1.$

因此, 由亚伯耳判别法知, 原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

*) 利用 2672 题的结果.

2783. 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

解 可以. 例如, 函数叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x) (n=1, 2, \dots)$$

其中
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数;} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

显然, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上每一点均不连续, 但由于

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} (n=1, 2, \dots; -\infty < x < +\infty),$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x) \equiv 0 (-\infty < x < +\infty)$ 显然是连续函数. 此例说明, 不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

2784. 证明: 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

证 由哥西准则及题设知: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 $[a, b]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 由于

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

故根据一致收敛的哥西准则知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上是否必定一致收敛?

解 未必. 例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$$

在 $[0, 1]$ 上绝对并一致收敛, 但其绝对值级数不一致收敛. 事实上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$$

在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛^{*}). 因此, 我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛就可以了.

首先, 当 $x = 0$ 及 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1-x)x^n$ 显然收敛. 当 $0 < x < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$

$= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ 是交错级数且满足莱布尼兹条件, 故也收敛. 要证其一致收敛, 只要证其余式

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (1-x)x^k$ 一致趋于零(对 $0 \leq x \leq 1$)即可. 按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计,

有

$$|R_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1} (0 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

令 $f(x) = (1-x)x^{n+1}$, 通过求导数易知此函数在 $x = \frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值, 故当 $0 \leq x \leq 1$

时, 恒有

$$0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

于是, 由(1)式知

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+2} (0 \leq x \leq 1; n=1, 2, \dots).$$

由此即知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $R_n(x)$ 关于 $0 \leq x \leq 1$ 一致趋于零.

*) 利用 2769 题的结果.

2786. 证明: 绝对收敛且一致收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{若 } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{若 } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

不能用正项的收敛数项级数作为其强级数.

证 首先指出 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的. 事实上, 当 $n \geq N$ 时, 哥西余项函数为

$$R_{N,p}(x) = f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x) + \dots + f_{N+p}(x).$$

于是, 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有

$$R_{N,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \sin^2(2^{N+2}\pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+2)}, 2^{-(N+1)}), \\ \frac{1}{N+2} \sin^2(2^{N+3}\pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+3)}, 2^{-(N+2)}); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{N+p} \sin^2(2^{N+p+1}\pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+p+1)}, 2^{-(N+p)}); \\ 0, & \text{其它点 } x \end{cases}$$

因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$|R_{N,p}(x)| < \frac{1}{N}.$$

由此即知: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有 $|R_{N,p}(x)| < \varepsilon$, 其中 p 为任意自然数. 由哥西准则知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致收敛. 下面证明: 不可能用某正项收敛数项级数作为其强级数. 采用反证法, 假设有某收敛的强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n \geq 0$ 是常数, 即在 $[0, 1]$ 上有

$$|f_n(x)| \leq a_n (n=1, 2, \dots), \quad (1)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 以下将说明由此引出矛盾. 事实上, 据(1)

式对一切 $x \in [0, 1]$ 均成立. 今取 $x_n = \frac{3}{2} 2^{-(n+1)}$, 显然

有

$$2^{-(n+1)} < x_n < 2^{-n}.$$

因此得

$$a_n \geq |f_n(x_n)| = \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x_n) = \frac{1}{n} > 0.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也应收敛, 这与众所周知的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散结论相抵触. 证毕.

2787. 证明: 若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在闭区间 $[a, b]$ 的端点绝对收敛, 则此级数在闭区间 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

证 按题设, $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n = \max(|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|)$, 由于 $0 \leq a_n \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$, 故知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛. 由于 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调的, 故

$$|\varphi_n(x)| \leq a_n \quad (a \leq x \leq b; n=1, 2, \dots).$$

由外耳什特拉斯判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

2788. 证明: 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛区间为 $(-R, R)$ ($R > 0$), $[a, b] \subset (-R, R)$. 令

$$r = \max(|a|, |b|),$$

则当 $x \in [a, b]$ 时, 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |r|^n = |a_n r^n|.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ 收敛, 故原幂级数在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛. 由 $[a, b]$ 的任意性, 本题获证.

2789. 设 $a_n \rightarrow \infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

在不包含点 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证 设 E 是任一不包含点 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 的有界闭集, 则存在常数 $M > 0$, 当 $x \in E$ 时有

$$|x| \leq M \text{ 且 } \left| \frac{x}{a_n} \right| \neq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$. 因此, 存在 N , 使当 $n > N, x \in E$ 时,

$$\left| \frac{x}{a_n} \right| < \frac{1}{2}$$

于是,当 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x-a_n} \right| &= \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{a_n} \right|} \leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{a_n} \right|} \\ &\leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{|a_n|}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|a_n|}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x-a_n} \right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

2790. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

证 $0 < \frac{1}{n^x} \leq 1$, 且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的. 又

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛,故由亚伯耳判别法知,级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

在域 $x \geq 0$ 内一致收敛.

证 $0 < e^{-nx} \leq 1$, 且 e^{-nx} 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的. 又

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛,故由亚伯耳判别法知,级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2792. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

证 首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上, 由 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知, 原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续. 由于 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) = \frac{\cos nx}{n^2}$

连续, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛, 故再次根据函数项级数一致收敛的性质, 即知上述级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且有 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

$$\frac{\cos nx}{n^2}.$$

2793. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外, 在一切的点有定义并且是连续的; (b) 为周期函数, 其周期等于 1.

证 考虑级数(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$.
显然, 当 $x \neq k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 级数(1)收敛; 当 $x \neq -l (l = 1, 2, \dots)$ 时, 级数(2)收敛. 因此, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(a) 因而在除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义. 下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x = x_0 (x_0 \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处 $f(x)$ 连续, 我们可以在 $([x_0], [x_0] + 1)$ 内考虑一个包含 x_0 的区间 $[a, b]$:

$$[x_0] < a < x_0 < b < [x_0] + 1.$$

记 $p = \max(|a|, |b|)$. 在 $[a, b]$ 上考虑级数(1) 及(2). 当 n 适当大时(例如 $n \geq n_0$), 由于

$$\left| \frac{1}{(n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

$$\left| \frac{1}{(-n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 从而, 级数

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,

也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 于是, 其和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(6) 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 有 $f(x+1) =$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n - (x+1)]^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(n-1) - x]^2}$, 作指标变换 $m = n - 1$, 则当 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时有 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 因而得

$$f(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-x)^2} = f(x),$$

上式表明, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

2794. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上收敛但不一致收敛, 而它的和在此线段上是连续函数.

证 考虑部分和

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n [kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}] \\ &= nxe^{-nx}, \end{aligned}$$

显然, 在 $[0, 1]$ 上其极限函数 $S(x)$ 存在 (即级数的和) 且连续:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

但此级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 用反证法. 若不然, 即若一致收敛, 则对任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有 $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$. 今取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}e^{-1}$, 应有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x = x_0 = \frac{1}{n}$, 则也应有 $|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面, 却有

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| = S_n(x_0) = e^{-1} > \epsilon_0,$$

矛盾. 证毕.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2};$$

$$(B) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}.$$

解 (a) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|x + \frac{1}{n}\right|^n} = |x|$, 故当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $|x| > 1$ 时, 级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, 通项不趋于零, 因而级数也发散. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-1, 1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续. 设 $0 < \delta < 1$, 则当 $|x| \leq 1 - \delta$ 时, 有

$$\left|x + \frac{1}{n}\right| \leq \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right).$$

上面已证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上一致收敛, 从而 $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意的小, 故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 1)$ 内连续.

$$(b) \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}.$$

由迪里黑里判别法易知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}$ 在整个数轴上一致收敛,故其和函数在整个数轴上连续. 又对于任意的 $M > 0$, 当 $x \in [-M, M]$ 时, 由于 $\left| \frac{x}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{M}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ 在 $[-M, M]$ 上一致收敛, 从而其和函数在 $[-M, M]$ 上连续. 由 M 的任意性知上述和函数在整个数轴上连续.

于是, 作为这两个级数的和 $f(x)$ 在整个数轴上有定义且是连续的.

(B) 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 且 $x \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故此时级数绝对收敛. 显然当 $x=0$ 时级数收敛于零. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-\infty, +\infty)$.

注意在任一点 $x_0 \neq 0$ 上, 例如 $x_0 > 0$ 时, 我们可选 a, b 使 $0 < a < x_0 < b$. 考虑 $x \in [a, b]$, 显然有

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a, b]$ 上一致

收敛. 注意每一个 $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 连续, 因而和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 于是, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续 (对于 $x_0 < 0$ 的情况可同理证明), 而且易得

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{x} (x \neq 0).$$

由此可见

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x=0; \\ \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \end{cases}$$

即和函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 而在 $x \neq 0$ 处连续.

2796. 设 $r_k (k=1, 2, \dots)$ 表线段 $[0, 1]$ 上的有理数. 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

具有下列性质: 1) 连续; 2) 在无理点可微分而在有理点不可微分.

证 1) 由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\left| \frac{x - r_k}{3^k} \right| \leq \frac{1}{3^k}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ 收敛, 故原级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 又 $\frac{|x - r_k|}{3^k}$ 连续, 故和函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

2) 先设 x_0 为 $[0, 1]$ 中的无理点. 当 $x \neq x_0$ 时, 我们有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x), \quad (1)$$

其中 $v_k(x) = \frac{|x - r_k| - |x_0 - r_k|}{3^k(x - x_0)} (k=1, 2, \dots)$.

由于 $||x - r_k| - |x_0 - r_k|| \leq |(x - r_k) - (x_0 - r_k)| = |x - x_0|$, 故 $|v_k(x)| \leq \frac{1}{3^k} (x \neq x_0)$. 由此可知, 级数

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1, x \neq x_0$ 上一致收敛. 另外, 对于每个固定的 k , 由于 $x_0 \neq r_k$, 故当 x 与 x_0 充分近时, $(x - r_k)$ 必与 $(x_0 - r_k)$ 同号, 由此易知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k=1, 2, \dots).$$

从而, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限, 再根据 (1) 式即得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k). \end{aligned}$$

由此可知, $f(x)$ 在点 x_0 可微且

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

现设 x_0 是 $[0, 1]$ 中一个有理点, 于是 $x_0 = r_m, m$ 为某正整数. 这时, (1) 式为: 当 $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } v_m(x) &= \frac{|x - r_m| - |x_0 - r_m|}{3^m(x - x_0)} = \frac{|x - x_0|}{3^m(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{3^m} \operatorname{sgn}(x - x_0). \end{aligned}$$

仿前段之证, 可知: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k \neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k \neq m} v_k(x) = \sum_{k \neq m} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x)$$

$$= \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由于显然 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} v_m(x) = \frac{1}{3^m}$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} v_m(x) = -\frac{1}{3^m}$, 故极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是, 根据 (2) 式即知极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在, 故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

2797. 证明: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在域 $x > 1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x > 1$ 时收敛. 各项求导数所得级数为 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1 < a \leq x < +\infty$ 上一致收敛 (a 为大于 1 的任何数). 事实上, 当 $a \leq x < +\infty$ 时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛 (这是由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^a} / \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0,$$

而 $\frac{a+1}{2} > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛), 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函

数,即知:在 $a \leq x < +\infty$ 上可逐项求导数,得

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad (1)$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续. 再由 $a > 1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1 < x < +\infty$ 成立,并且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续. 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续.

利用数学归纳法,并注意到对任何正整数 k ,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ ($a > 1$) 都收敛,仿照上述,可证:对任何正整数 k , $\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续,并且可由原级数逐项求导数 k 次而得:

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad (1 < x < +\infty).$$

2798. 证明: θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并可微分无穷次.

证 首先,我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 中, $u_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$. 显然有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$, 故只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \quad (x > 0)$$

即可. 对于每一个 $x > 0$ 及充分大的 n , 有

$$0 < e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后, 得级数

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x},$$

它在 $[\epsilon, +\infty)$ 内是一致收敛的 (ϵ 为任意正数). 事实上, 当 n 充分大时, 对一切 $\epsilon \leq x < +\infty$, 均有

$$0 < \pi n^2 e^{-\pi n^2 x} \leq \pi n^2 e^{-\pi n^2 \epsilon} < \frac{1}{n^2 \epsilon}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \epsilon}$ 收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$$

在 $\epsilon \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数, 即知级数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

在 $[\epsilon, +\infty)$ 内连续可微, 且可逐项求导数. 由 $\epsilon > 0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次, 仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次, 利用数学归纳法, 并注意到当 n 充分大时, 对于一切 $x \in [\epsilon, +\infty)$, 均有

$$0 < (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 \epsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微分 k 次, 其中 k 为任意自然数, 从而 $\theta(x)$ 当 $x > 0$ 时可微分无穷次.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微分性, 设:

$$(a)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; (6)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

解 (a)易知当 $x \neq -k (k=1, 2, \dots)$ 时, 级数是莱布尼兹型, 因而收敛. 任取 $x=x_0, x_0 \neq -k (k=1, 2, \dots)$.

1°当 $x_0 \geq 0$, 取 $\beta > x_0$, 则 $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \beta]$. 在区间 $[-\frac{1}{2}, \beta]$ 上, 注意 $u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x}$, 有

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2} (n=1, 2, \dots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$ 随 n 单调下降且一致趋于零, 事实上, 当 $x \in [-\frac{1}{2}, \beta], n > 1$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| \leq \frac{n}{(n-1)^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty);$$

显然 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界 (小于或等于 1). 因此, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[0, \beta]$ 上一致收敛. 从而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[0, \beta]$ 上可微, 当然它在 $x=x_0$ 点可微.

2°当 $x_0 < 0$ 时, 必有 k_0 , 使

$$-(k_0+1) < x_0 < -k_0.$$

今选取 α, β , 使

$$-(k_0+1) < \alpha < x_0 < \beta < -k_0.$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上, $u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ 连续且随 n 单调下

降,并且一致趋于零(考虑充分大的 n):

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| &= \frac{n}{n^2+2nx+x^2} \leq \frac{n}{n^2-2n|x|} \\ &\leq \frac{n}{n^2-2n|\alpha|} = \frac{1}{n-2|\alpha|} \\ &\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

又显然知 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界,故 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. 因而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[\alpha, \beta]$ 上可微,当然它在 $x = x_0$ 点可微.

总之,函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x \neq -k (k = 1, 2, \dots)$ 上有定义且可微.

(6) 当 $x=0$ 时,级数显然收敛.

当 $x \neq 0$ 时,由于

$$\frac{\frac{|x|}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+x^2} |x| \longrightarrow |x| \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ 当 $x \neq 0$ 时也收敛. 从而可知 $f(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛,故可记 $f(x) = |x|$

• $\varphi(x)$. 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 则有 $l > 0$ 使 $-l < x_0 <$

1. 当 $x \in [-l, l]$ 时, 由于

$$\left| \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)' \right| = \left| \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2l}{n^4} \quad (n=1, 2, \dots),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)'$ 在 $[-l, l]$ 上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微. 又因 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微, 再注意到恒有 $\varphi(x) > 0$, 即知 $f(x) = |x|\varphi(x)$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微.

2800. 证明: 叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

证 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$|\operatorname{arctg} x^n| \leq \frac{\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故有

$$|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

易见 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 任给 $\epsilon > 0$, 选取 $N = \left\lceil \frac{\pi}{2\epsilon} \right\rceil$, 则

当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2(N+1)} < \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{2\epsilon}} = \epsilon.$$

于是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零. 但

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

易见

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'_{x=1} = f'(x)|_{x=1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

因此,两个极限不相等.值得注意的是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零,但 $f'_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不一致收敛于其极限函数:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

2801. 证明: 叙列

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2 = f(x)$. 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给 $\epsilon > 0$, 只要取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

其次, 由于

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' = (x^2)' = 2x,$$

而 $f'_n(x) = 2x + \cos n(x + \frac{\pi}{2})$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时极限不存在, 当然有

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

2802. 当参数 α 取甚么值: (a) 叙列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛; (6) 叙列 (1) 在 $[0, 1]$ 上一致收敛; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

解 (a) 当 $x=0$ 时, 对于任意 α , 均有 $f_n(x)=0$; 当 $x \neq 0$ 且 $x \in (0, 1]$ 时, 对于任意 α , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0.$$

因此, 对于任意的 α , $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于函数 $f(x)=0$.

(6) 由于 $f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$, 故当 $x = \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) = 0$. 又由于当 $x < \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) < 0$, 故 $x = \frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值点. 因此,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1} e^{-1} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

当 $\alpha < 1$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $n^{\alpha-1} e^{-1} \rightarrow 0$. 于是, 当 $\alpha < 1$ 时, 对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 N , 使当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [0, 1]$, 均有

$$|f_n(x) - 0| < \epsilon,$$

即当 $\alpha < 1$ 时, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零. 当 $\alpha \geq 1$

时, 由于 $f_n(\frac{1}{n}) \not\rightarrow 0$, 故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致趋于零.

(B) 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限, 即只要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx. \quad (2)$$

事实上,

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 x e^{-nx} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \left(-\frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n^2} e^{-n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-2} (1 - e^{-n} - ne^{-n}). \end{aligned}$$

要(2)式成立, 只要下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0,$$

当 $a < 2$ 时成立. 于是, 当 $a < 2$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限.

2803. 证明: 叙列

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

证 当 $x=0$ 时, 对于任意的 n , $f_n(x)=0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)=0$. 因此, 叙列 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零. 下证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x e^{-n x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-n x^2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,\end{aligned}$$

本题获证.

2804. 证明: 叙列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

证 先证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛. 事实上, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 对任意的 n , 均有 $f_n(x)=0$; 而当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零.

下证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 为此, 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2e}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x_n = \frac{1}{n+1}$, 就有

$$\begin{aligned}|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - 0| &= n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

那末取适当的 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 就有

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

$$\text{最后证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(1-y)y^n dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} y^{n+1} - \frac{n}{n+2} y^{n+2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0, \end{aligned}$$

故得证.

2805. 于下式中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$$

在积分符号下取极限合理否?

解 由于

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} \right] dx &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctan nx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来,若数列 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件,但当它不一致收敛时,则就不一定能保证可以在积分号下取极限了,本题就是其中一例.事实上,取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$,

不论 n 多么大,只要取 $x = \frac{1}{n}$,就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^4}} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \epsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在 $[0, 1]$ 上并不一致收敛.

求出:

2806. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}.$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x \leq 1$. 此时, 由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1, 且当 n 增加时单调下降, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 故根据亚伯耳判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1} \quad (1)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow 1-0$ 时, 级数(1)可以逐项取极限, 其结果为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2^*).$$

*) 利用 2661 题的结果.

$$2807. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x < 1$. 在此区间上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x, \text{ 故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1.$$

$$2808. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

解 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0, l]$ ($l > 0$) 上单调下降且小于或等于

1, 而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上连续,

且

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

故当 $x \rightarrow +0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限, 其结果为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \end{aligned}$$

2809. 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 合理否?

解 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 再由 $\left| \arctg \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ 知

原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 收敛; 因此, 原级数和的导数用逐项

微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

2810. 在闭区间 $[0, 1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$$

合理否?

解 令 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}})$, 则当 $x = 0, 1$ 时,

$S_n(x) = 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$. 因此,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, 1; \\ 1 - x, & \text{当 } 0 < x < 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取

$x_n = \frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, $S_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

注意, 对于不一致收敛的级数而言, 一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说, 由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) \right] dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故本题所给出的级数在 $[0, 1]$ 上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明, 级数在 $[a, b]$ 上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件, 并不是必要条件.

2811. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是可微分任何次的函数, 且其导函数 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 的叙列在每一个有穷区间 (a, b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明 $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 C 为常数.

证 由于 $f(x)$ 可微分任意次, 故 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内连续且可微 ($n = 1, 2, \dots$). 又按题设 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $\varphi(x)$, 且其导函数叙列 $f^{(n+1)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 (a, b) 内也一致收敛于 $\varphi(x)$, 故 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内可微, 并且

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= [\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} [f^{(n)}(x)]' \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = \phi(x).\end{aligned}$$

积分之, 即得

$$\ln \phi(x) = x + C_1,$$

也即

$$\phi(x) = Ce^x,$$

其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

§ 5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

都存在有收敛区间: $|x-a| \leq R$, 已知的级数在其内收敛, 而在其外发散. 收敛半径 R 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

来计算(若此极限存在).

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) 在收敛区间的端点 $x = R$ 处收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 a 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \\ (0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西形式).

必须记住下列五个基本的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\ (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \\ (-1 < x < 1).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \\ + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1).$$

4° 幂级数的运算 在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内有:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x-a)^n; \end{aligned}$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

式中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$;

$$(B) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

$$(I) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5° 在复数域内的幂级数 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

式中 $c_n = a_n + ib_n, a = \alpha + i\beta, z = x + iy, i = \sqrt{-1}$. 对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a| \leq R$, 原来的级数在其内收敛 (并且是绝对地), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质:

2812. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=-1$ 时, 若 $p>1$, 则幂级数为绝对收敛; 若 $0<p \leq 1$, 则为条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 则为发散.

当 $x=1$ 时, 若 $p>1$, 则为绝对收敛; 若 $p \leq 1$ 则为发散.

2813. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$

解 记 $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3})$,

即 $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 幂级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (-1)^n \frac{1}{3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

故收敛. 因此, 当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}$.

$(x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 幂级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

由于上式右端第一个级数发散, 第二个级数收敛, 故原级数发散.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

故收敛半径 $R=4$; 收敛区间为 $(-4, 4)$.

当 $x=-4$ 时, 利用斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1+o(1))$$

得

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n \right| &= \frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2 + o(1)}{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n} + o(1)} \cdot 4^n \\ &= \sqrt{n\pi} (1+o(1)) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此, 当 $x=-4$ 时级数发散.

当 $x=4$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2n+2} \right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n (0 < \alpha < 1).$

解 记 $a_n = \alpha^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^{2n+1}} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}} \right]^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$; 收敛区间为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

当 $|x| = \frac{1}{e}$ 时, 由于

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \left(\frac{1}{e} \right)^n \cdot (\pm 1)^n \right| \rightarrow 1 \neq 0 (n \rightarrow \infty),$$

故级数发散.

$$2817. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n (a > 1).$$

解 记 $a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$2818. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

解 记 $a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$; 收敛区间为 $(-2+1, 2+1)$, 即 $(-1, 3)$.

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p,$$

由 2689 题的结果知: 若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 2$, 为条件收敛; 若 $p \leq 0$, 为发散.

当 $x = 3$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $p \leq 2$, 为发散.

$$2819. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

解 记 $a_n = (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^p = 2^p,$$

故收敛半径 $R = 2^p$; 收敛区间为 $(-2^p, 2^p)$.

当 $x = -2^p$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^p \\ &= 1 + \frac{p}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故由高斯判别法知: 当 $\frac{p}{2} > 1$ (即 $p > 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (由于是正项级数, 故也是绝对收敛); 当 $\frac{p}{2} \leq 1$ (即 $p \leq 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $x = 2^p$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right]^p, \end{aligned} \quad (1)$$

由前段知, 当 $p > 2$ 时, 为绝对收敛; 当 $0 < p \leq 2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} &\left| (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \right| \\ &\sim \left[\frac{4^n \cdot 2n\pi \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot (2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)}} \right]^p \\ &= \left[\frac{4^n \cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot 2^{2n+1} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n+1}} \right]^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$(n \rightarrow \infty),$

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+3)!} \right]^p}{\left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^p < 1,$$

故级数(1)逐项下降, 根据莱布尼兹判别法知级数(1)收敛, 但由于由其绝对值组成的级数发散. 因此, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 级数(1)条件收敛. 当 $p=0$ 时, 通项为 $(-1)^n$, 故级数为发散; 当 $p < 0$ 时, 通项趋于无穷, 因而级数也发散.

2820.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

利用 2700 题的结果, 即知: 当 $m \geq 0$ 时, 绝对收敛; 当 $-1 < m < 0$ 时, 条件收敛; 当 $m \leq -1$ 时, 发散.

当 $x=-1$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}, \end{aligned}$$

显见当 $m \geq 0$ 时为绝对收敛; 当 $m < 0$ 时: 若 m 为负整

数, 设为 $-k$ (k 为正整数), 则通项为

$$\begin{aligned} & \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!} \rightarrow +\infty \\ & \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故级数发散; 若 m 不为负整数, 由于通项为正, 并且总可以大于 $\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$, 其中 $-m > k$, 故

级数也发散. 因此, 当 $m < 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}$ 发散.

2821. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n (a > 0, b > 0).$

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1 = \frac{1}{a}$ 及 $R_2 = \frac{1}{b}$, 故原级数的收敛半径 $R = \min(R_1, R_2) = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$; 收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $x = -R$ 时, 若 $a < b$, 则级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \quad (1) \end{aligned}$$

对于上式右端的第一个级数, 利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}} \right| = \frac{a}{b} < 1,$$

故知其为绝对收敛,而第二个级数显然为绝对收敛. 因此,当 $a < b$ 时,级数(1)绝对收敛. 当 $a \geq b$ 时,级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n, \quad (2) \end{aligned}$$

上式右端的第一个级数条件收敛,第二个级数绝对收敛($b < a$)或条件收敛($b = a$),故当 $a \geq b$ 时,级数(2)条件收敛.

当 $x = R$ 时,若 $a < b$,级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

由前段知其为绝对收敛;若 $a \geq b$,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和,故为发散级数.

2822. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a > 0, b > 0).$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^n + b^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max(a, b) \cdot \frac{1 + \theta^{n+1}}{1 + \theta^n} = \max(a, b),$$

其中 $\theta = \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}$, $0 < \theta \leq 1$, 故收敛半径

$R = \max(a, b)$; 收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $|x| = R$ 时, 由于 $\frac{R^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0$, 故级数发散.

2823. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} (a > 0).$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}.$$

由于

$$n \left(\frac{a^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a^{-\frac{1}{\sqrt{n+1}}}} - 1 \right) = \frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 $\ln a$, 故当 $a > 1$ 时, 上式趋于 $+\infty$, 因而级数收敛; 当 $a < 1$ 时, 上式趋于 $-\infty$, 因而级数发散; 而当 $a = 1$ 时, 由于通项为 1, 故级数也发散.

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}.$$

当 $a > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 由于通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $|x| = 1$ 时, 若 $a > 1$, 则级数绝对收敛; 若 $a \leq 1$, 则级数发散.

2824. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$

解 记 $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (1)$$

由于

$$0 < \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛^{*}), 故级数(1)收敛.

当 $x = -1$ 时, 级数绝对收敛.

总之, 当 $|x| = 1$ 时, 级数绝对收敛.

^{*}) 利用 2823 题的结果.

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

由拉阿伯判别法易知它是发散级数.

当 $x=-1$ 时, 由于 $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1$, 即

$|a_n| > |a_{n+1}|$, 且有 $|a_n| \rightarrow 0$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 发散, 故当 $x=-1$ 时, 级数条件收敛.

2826. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=-1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n. \quad (1)$$

由于

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi} e^{-n} n^n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} > 0$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数(1) 发散.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n. \quad (2)$$

由于

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n = 0$. 又由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} > 1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $|a_n| > |a_{n+1}|$. 因此, 级数(2)收敛. 但由于级数(1)发散, 故级数(2)条件收敛.

$$2827. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n.$$

解 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x| = 1$ 时, 由于 $a_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 故级数发散.

$$2828. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{4}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

当 $x = \frac{1}{4}$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}. \quad (1)$$

将它拆成两部分, 一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$, 一部分为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}.$$

前一级数显然发散; 而对于后一级数, 利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛. 因此, 级数(1) 发散.

当 $x = -\frac{1}{4}$, 同法可证, 原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数. 因此, 它也是发散的.

2829.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{\left(1 + 2\cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 对于 $n = 8k$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k} \cdot \frac{1}{3^{8k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$$

及

$$\frac{1}{\ln k + \ln 8} > \frac{1}{k + \ln 8} > 0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

不难证明: 当 $n = 8k + 1, 8k + 2, \dots, 8k + 7$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n \quad (1)$$

收敛. 事实上, $\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零, 且

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^m \left| \left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n \right| \cdot \frac{1}{3^n} \\ & \leq \sum_{n=2}^m \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{3} \right)^n < \sum_{n=1}^m \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \\ & < \frac{1 + \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{2}}{3}} \\ & = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} < 5, \end{aligned}$$

根据迪里黑里判别法可知级数(1)收敛.

于是, 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的. 因此, 它是发散的.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \text{ 及 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x| = 1$ 时, 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

收敛, 故原级数绝对收敛.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (普林斯格木级数).

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n]}}{n},$$

它是条件收敛的 *).

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

记 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\} (l = 1, 2, \dots)$. 显然 A_l 内的元素可写成 $n = l^2 + s$, 而 $s = 0, 1, 2, \dots, 2l$.

考虑

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2 + s} \\
&= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2 + 1} - \frac{1}{l^2 + 2} \right) - \cdots \\
&\quad - \left(\frac{1}{l^2 + 2l - 1} - \frac{1}{l^2 + 2l} \right) \\
&\leq \frac{1}{l^2} (l = 1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ 收敛, 故 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 收敛. 注意 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ 就是全体自然数. 易证 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 同时收敛或同时发散. 由此可见, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 因而显然是条件收敛的.

*) 利用 2672 题的结果.

2832. 求超越几何级数

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

的收敛域.

解 记 a_n

$$= \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时,级数为

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \dots \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} \\ + \dots$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} (|\theta_n| \leq L),$$

故当 $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 1$ 即 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时,级数收敛且也是绝对收敛的;当 $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时,级数发散.

当 $x=-1$ 时. 由上可知,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时,级数绝对收敛;当 $\gamma - \alpha - \beta < -1$ 时,从某项开始,将有

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1 \quad \text{即} \quad |a_n| < |a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零,级数发散;当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta$ 时,在弃去若干个开始项以后,就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了,并在这里,把求通项(绝对值)的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便. 由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ = \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2} \right)$$

$$=-\infty \quad (|\theta'_n| \leq M),$$

故上述无穷乘积的值为零, 即 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 因此, 级数收敛. 当 $\gamma - \alpha - \beta = -1$ 时, 由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta'_n}{n^2}$, 故无穷乘积的值异于零, 因而 $a_n \nrightarrow 0$, 级数发散.

综上所述, 现将超越几何级数的敛散情况列表如下:

$ x < 1$		绝对收敛
$ x > 1$		发 散
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq 0$	发 散
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$	条件收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq -1$	发 散

求下列广义的幂级数的收敛域:

$$2833. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{2n+1}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ (即 $x > 0$) 时, 级数绝对收敛;

当 $x < 0$ 时, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1},$$

显然发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

的收敛域为 $(0, +\infty)$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$.

解 记 $a_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2, \end{aligned}$$

故当 $\left| \frac{1}{x} \right| < 2$ 即当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数发散; 当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi \neq 0,$$

故级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

的收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 即满足不等式

$|x| > \frac{1}{2}$ 的一切 x 值所成的集合.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x^n}{2^{n^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}.\end{aligned}$$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$$

的收敛域为 $(-\infty, +\infty)^{*})$. 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n}$$

的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$. 因此, 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} x^n$$

的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$, 即满足不等式 $0 < |x| < +\infty$ 的一切 x 值所成的集合.

*) 利用 2815 题的结果.

$$2836. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$, 则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1},$$

故当 $|e^{-x}| < \frac{1}{e^{-1}} = e$ 即当 $1+x > 0$ 或 $x > -1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $x < -1$ 时, 级数发散; 当 $x = -1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n = 1 \neq 0,$$

故级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$$

的收敛域为 $(-1, +\infty)$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x.$

解 记 $a_n = \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} = 1,$$

故当 $|\operatorname{tg} x| < 1$ 即当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时, 级数绝对收敛; 当 $|x - k\pi| > \frac{\pi}{4}$ 时, 级数发散. 当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} (\pm 1)^n.$$

由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} < 1,$$

故 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 从而 $a_n \nrightarrow 0$, 级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$$

的收敛域为满足不等式 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 的一切 x 值所成的集合.

2838. 把函数

$$f(x) = x^3$$

按二项式 $x+1$ 的正整数幂来展开.

解 方法一:

$$\begin{aligned}f(x) &= [(x+1)-1]^3 \\&= (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1.\end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}f(-1) &= -1, f'(-1) = 3, f''(-1) = -6, \\f'''(-1) &= 6, f^{(4)}(-1) = f^{(5)}(-1) = \cdots = 0.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}f(x) &= -1 + 3(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2 \\&\quad + \frac{6}{3!}(x+1)^3 \\&= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.\end{aligned}$$

2839. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{a+x} \quad (a \neq 0)$$

按以下方式展为幂级数:(a)依 x 的乘幂展开;(b)依二项式 $x-b$ 的乘幂展开,此处 $b \neq a$;(c)依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开. 求出对应的收敛域.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (a) f(x) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}},\end{aligned}$$

收敛域为 $|x| < |a|$.

$$\begin{aligned}(b) f(x) &= \frac{1}{a-b-(x-b)} \\&= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-b}{a-b}}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},$$

收敛域为 $|x-b| < |a-b|$.

$$\begin{aligned} \text{(B)} f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}} \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}, \end{aligned}$$

收敛域为 $|x| > |a|$.

2840. 把函数 $f(x) = \ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开, 并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和.

解 $f(x) = \ln[1 + (x-1)]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}. \quad (1)$$

收敛区间为

$$|x-1| < 1 \text{ 或 } 0 < x < 2.$$

当 $x-1=1$ 即当 $x=2$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

显然收敛, 故当 $0 < x \leq 2$ 时, 级数(1)收敛.

由于 $\ln x$ 在 $x=2$ 连续, 故当 $x=2$ 时, (1) 式也成立, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式, 并求出对应的收敛区间:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},
 \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < +\infty$ 或 $(-\infty, +\infty)$.

2842. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$$\text{解 } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2843. $f(x) = \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},
 \end{aligned}$$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2844. $f(x) = a^x (a > 0)$.

$$\text{解 } f(x) = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n. \text{ 由于}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln^n a}{n!} \right|} = |\ln a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2845. $f(x) = \sin(\operatorname{arcsin} x)$.

$$\text{解 } \operatorname{arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots\right) dt \\
&= x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \dots \\
&\quad (|x| < 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= u \arcsin x - \frac{u^3}{3!} (\arcsin x)^3 \\
&\quad + \frac{u^5}{5!} (\arcsin x)^5 - \dots \\
&= ux + \frac{u(1^2 - u^2)}{3!} x^3 \\
&\quad + \frac{u(1^2 - u^2)(3^2 - u^2)}{5!} x^5 + \dots,
\end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2846. $f(x) = \cos(u \arcsin x)$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } f(x) &= 1 - \frac{u^2}{2!} (\arcsin x)^2 \\
&\quad + \frac{u^4}{4!} (\arcsin x)^4 - \dots \\
&= 1 - \frac{u^2}{2!} x^2 - \frac{u^2(2^2 - u^2)}{4!} x^4 - \dots.
\end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2847. 写出函数 $f(x) = x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } f(x) &= x^x, f(1) = 1; \\
f'(x) &= x^x(1 + \ln x), f'(1) = 1; \\
f''(x) &= x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}, f''(1) = 2; \\
f'''(x) &= x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1} \\
&\quad + x^{x-1} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right), \\
f'''(1) &= 3.
\end{aligned}$$

于是,展式的前三项为

$$1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\cdots,$$

收敛区间为 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$.

2848. 写出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x\neq 0$) 和 $f(0)=e$ 按变数 x 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, f(0)=e$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right] \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right] \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

由微分学中值定理知

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间, 从而

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = -\frac{e}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right\} \end{aligned}$$

$$(x \neq 0).$$

仿上可得

$$f''(0) = \frac{11}{12}e;$$

$$\begin{aligned} f'''(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} & \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^3 \right. \\ & + 3 \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \\ & \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right] \\ & + \left[-\frac{6}{x^4} \ln(1+x) + \frac{2}{x^3(1+x)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \right] \right\} \\ & (x \neq 0). \end{aligned}$$

同理可得

$$f'''(0) = -\frac{21}{8}e.$$

于是,展式的前三项为

$$e \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \cdots \right),$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2849. 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变数 h 的正整数幂展开.

解 $\sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \sinh$

$$\begin{aligned} &= \sin x \cdot \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots \right) \\ &\quad + \cos x \cdot \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots \right) \\ &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \cdots, \end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}\cos(x+h) &= \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \sin x + \cdots,\end{aligned}$$

它们的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ 的幂级数展开式的收敛区间: (a) 依 x 的乘幂展开; (6) 依二项式 $x-5$ 的乘幂展开.

解 (a) 由于

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},\end{aligned}$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为 $(-2, 2)$, 而第二项的展开式的收敛区间为 $(-3, 3)$, 故取其公共部分即得函数 $f(x)$ 展为关于 x 的乘幂的幂级数的收敛区间 $(-2, 2)$.

$$\begin{aligned}(6) \frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}}.\end{aligned}$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为 $|x-5| < 2$, 而第二项展开式的收敛区间为 $|x-5| < 3$, 取其公共部分, 即得函数 $f(x)$ 展为关于 $x-5$ 乘幂的幂级数的收敛区间为 $|x-5| < 2$ 或 $(3, 7)$.

利用 I - V 基本展开式, 写出下列函数关于 x 的幂级

数展开式:

2851. e^{-x^2} .

$$\begin{aligned}\text{解 } e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (|x| < +\infty)\end{aligned}$$

2852. $\cos^2 x$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \\ &\quad (|x| < +\infty).\end{aligned}$$

2853. $\sin^3 x$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &\quad (|x| < +\infty).\end{aligned}$$

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

$$\text{解 } \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解 $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$

$$= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots$$

$$+ \frac{(-2)(-2-1)\dots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n (|x| < 1).$$

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= x \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) \right.$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2$$

$$\left. + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \dots \right]$$

$$= x + x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!}x^4 + \dots$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1} \quad (|x| < \frac{1}{2}).$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果, 即知它是收敛的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 无定义, 故不必研究级数的敛散性. 从而

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right).$$

2857. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{x}{1+x-2x^2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n \right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{12-5x}{6-5x-x^2} &= \frac{1}{1-x} + \frac{6}{6+x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+\frac{x}{6}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n \quad (|x| < 1).$$

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$

解 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad *)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1+(-1)^n}{2} \right] x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n \quad (|x| < 1).$$

*) 利用 2855 题的结果 .

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}.$

解 $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2}{\sqrt{5}-1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{5}+1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} \right] x^n$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{5} + 1} \right)^{n+1} \Big] x^n \\
& = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{n+1} \right] x^n \\
& \qquad \qquad \qquad (|x| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}).
\end{aligned}$$

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

解 $\frac{1}{1+x+x^2}$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1}{x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \right] \\
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}x \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}x \right)^{-1} \right] \\
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right] \\
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] x^n.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] \\
&= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right] \\
&= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi - i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right] \\
&= (-1)^n \cdot 2i \sin \frac{n+1}{3} \pi \\
&= 2i \cdot (-1)^n \sin \left[(n+1)\pi - \frac{2(n+1)}{3} \pi \right] \\
&= 2i \cdot (-1)^n \cdot \left[-\cos(n+1)\pi \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi \right] \\
&= 2i \cdot (-1)^n \cdot (-1) \cdot (-1)^{n+1} \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi \\
&= 2i \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi,
\end{aligned}$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi,$$

其中 $|x| < \min \left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|}, \frac{2}{|1-i\sqrt{3}|} \right) = 1$,

即 $|x| < 1$.

2863. $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$

解 $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$

$$= -1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{x - (\cos \alpha + i \sin \alpha)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} \Big] \\
& = -1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\
& = -1 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \right] \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\alpha - i\sin n\alpha + \cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min \left(\frac{1}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|}, \frac{1}{|\cos\alpha - i\sin\alpha|} \right) = 1$.

2864. $\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} \quad *)$

解
$$\begin{aligned}
& \frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} \\
& = \frac{ix}{2} \left[\frac{1}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{x - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\
& = \frac{ix}{2} \left[-\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right] \\
& = \frac{ix}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n+1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos \alpha - i \sin \alpha)^{n+1} \\
& = \frac{ix}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n [-\cos(n+1)\alpha - i \sin(n+1)\alpha \\
& \quad + \cos(n+1)\alpha - i \sin(n+1)\alpha] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \sin(n+1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < 1$.

*) 译本误为 $\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$.

2865. $\frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}$

解 $\frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha}{x - (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha)} - \frac{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha}{x - (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha)} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\alpha}}{x - e^{\alpha}} - \frac{e^{-\alpha}}{x - e^{-\alpha}} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1 - x e^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - x e^{\alpha}} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-n\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{n\alpha} \right] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min(e^{-\alpha}, e^{\alpha}) = e^{-|\alpha|}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} (|x| < 1).
\end{aligned}$$

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$= \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$$

但

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

故当 $-1 < x \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\ln(1+x+x^2+x^3) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{[\frac{m}{2}]-1} (1 + (-1)^m) \frac{x^m}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} + (-1)^{[\frac{m}{2}]-1} (1 + (-1)^m)}{m} x^m.
\end{aligned}$$

2868. $e^{x\cos\alpha}\cos(xs\sin\alpha)$.

解 首先注意到

$$e^{x\cos\alpha + ix\sin\alpha} = e^{x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = e^{xe^{i\alpha}}$$

的实部就是 $e^{x\cos\alpha}\cos(xs\sin\alpha)$. 为此, 先求 $e^{xe^{i\alpha}}$:

$$\begin{aligned}
 e^{xe^{ia}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (xe^{ia})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{ina} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\cos na + i \sin na).
 \end{aligned}$$

比较上式两端的实部, 即得

$$\begin{aligned}
 e^{x \cos a} \cos(x \sin a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos na}{n!} x^n \\
 & \quad (|x| < +\infty).
 \end{aligned}$$

比较虚部, 还可得到

$$\begin{aligned}
 e^{x \cos a} \sin(x \sin a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin na}{n!} x^n \\
 & \quad (|x| < +\infty).
 \end{aligned}$$

首先展开导函数, 然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},
 \end{aligned}$$

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上, 当 $t \in [0, x]$ 且

$|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的, 并且各项均连续.

以下各题类似, 不再一一说明. 上述级数的收敛区间为 $|x| < 1$, 当 $|x| = 1$ 时, 为交错级数, 且满足莱布尼兹判别法的条件, 故在端点 $x = \pm 1$ 处, 级数均收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

令 $x = 1$, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2870. $f(x) = \arcsin x$.

解 $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right) dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 利用 2604 题的结果, 由于 $\frac{p}{2} + q = \frac{1}{2} + 1 > 1$, 故级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

2871. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

$$= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right) dt$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 级数为绝对收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$.

解 $\ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2) = \int_0^x \frac{2t - 2 \cos \alpha}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} dt$

$$= -2 \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \frac{t \cos \alpha - t^2}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha \right) dt^*) \\
&= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n.
\end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 由 2698 题知, 对于 $0 < \alpha < \pi$, 级数收敛. 因此, 当 $0 < \alpha < \pi$ 时, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$. 但当 $\alpha = 0$ 且 $x = 1$ 时, 级数发散; 当 $\alpha = 0$ 且 $x = -1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = 1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = -1$ 时, 级数发散.

*) 利用 2863 题的结果.

2873. 利用各种方法, 求下列函数展为幂级数的展开式:

(a) $f(x) = (1+x)\ln(1+x);$

(б) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$

(в) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x};$

(г) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2};$

(д) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2};$

(e) $f(x) = \arccos(1-2x^2);$

(ж) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$

(з) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$

解 (a) $f(x) = (1+x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (|x| < 1),$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 (6) f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad **) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

*) 利用 2857 题的结果.

**) 利用 2869 题的结果.

(B) 由于

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} \right)', \\
 &= -\frac{2}{1+4x^2},
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} &= -2 \int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} + \operatorname{arctg} 2 \\
 &= -2 \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4t^2)^{n-1} \right] dt + \operatorname{arctg} 2 \\
 &= \operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \left(|x| < \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 级数为交错级数, 且满足莱布尼兹判别

法的条件, 故收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq \frac{1}{2}$.

(Γ) 由于

$$f'(x) = \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{2-x^2} \right)' = \frac{4+2x^2}{4+x^4},$$

故

$$\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2} = \int_0^x \frac{4+2t^2}{4+t^4} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left[\left(1 + \frac{t^2}{2} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^4}{4} \right)^n \right] dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{t^{2n}}{2^n} \right] dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)} \quad (|x| < \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

当 $|x| = \sqrt{2}$ 时, 级数为

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2n+1}$$

及 $-\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2n+1},$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+1} \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数 $\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{2}$ 而得, 故它们收敛. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
(\text{Д}) f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \\
&\quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$ 收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用 2869 题的结果.

(e) 由于

$$f'(x) = [\arccos(1-2x^2)]' = \frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

及 $f(0)=0$, 故

$$\begin{aligned} \arccos(1-2x^2) &= 2\operatorname{sgn}x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2\operatorname{sgn}x \cdot \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= 2\operatorname{sgn}x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\ &= 2|x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (|x| < 1). \quad (1)$$

当 $|x|=1$ 时, 级数为

$$2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

即知它是收敛的. 因此, 级数(1)的收敛域为 $|x| \leq 1$.

$$(\kappa) f(x) = x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*})$$

$$\begin{aligned}
& + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
& = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\
& \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 + 11n}{(2n+1)^2} = \frac{5}{2} > 1,$$

即知它是收敛的. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用 2870 题的结果.

$$\begin{aligned}
(3) f(x) &= x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*}) - \left[1 + \frac{1}{2} x^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
&= -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \\
& \quad \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1).
\end{aligned}$$

*) 利用 2871 题的结果.

2874. 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导函数:

$$(a) f(x) = e^{x^2}; \quad (6)^+ f(x) = e^{\frac{a}{x}};$$

$$(B)^+ f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

解 (a) $f(x+h) - f(x) = e^{(x+h)^2} - e^{x^2}$

$$= e^{x^2} (e^{2xh+h^2} - 1)$$

$$= e^{x^2} \left[(2xh+h^2) + \frac{1}{2!} (2xh+h^2)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{n!} (2xh+h^2)^n + \dots \right],$$

其中 h^n 的系数为

$$e^{x^2} \left[\frac{1}{n!} (2x)^n + \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} + \dots \right]$$

$$= \frac{e^{x^2}}{n!} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right].$$

将 $f(x+h) - f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较, 即得

$$(e^{x^2})^{(n)} = e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right].$$

$$(6) f(x+h) - f(x) = e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} (e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1) = e^{\frac{a}{x}} (e^{\frac{-ah}{x^2} + \frac{ah^2}{x^3} - \frac{ah^3}{x^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} + \dots} - 1)$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \left[e^{-\frac{ah}{x^2} + \frac{ah^2}{x^3} - \frac{ah^3}{x^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} + \dots} - 1 \right]$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} \right]^m \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_1+1} \\
&\quad \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_2+1} \dots \\
&\quad \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_m+1} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \\
&\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=s} (-1)^{k_1+\dots+k_m+m} \\
&\quad \cdot \left(\frac{h}{x} \right)^{k_1+\dots+k_m+m} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x} \right)^m \right. \\
&\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\dots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{h}{x} \right)^s \Big] \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x} \right)^m \right. \\
&\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+m-1}^s (-1)^s \left(\frac{h}{x} \right)^s \Big]^* \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x} \right)^{m+s} C_{s+m-1}^s \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} \frac{(-1)^n a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x} \right)^n C_{n-1}^s \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left(\frac{h}{x} \right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} C_{n-1}^s x^{n-m} \frac{a^m}{m!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n,
\end{aligned}$$

其中

$$A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s.$$

于是,比较 h^n 的系数,即得

$$\begin{aligned}
(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} &= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s \\
&= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1) \cdot (n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots \right].
\end{aligned}$$

*) 其中 $\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} 1 = C_{s+m-1}^s$ 推导如下:

令 $|t| < 1$, 一方面由 $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-t} \right)^m &= \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = s} t^{k_1 + k_2 + \dots + k_m} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_m = s} 1 \right) t^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} P_s t^s,
\end{aligned}$$

其中 $P_s = \sum_{k_1 + \dots + k_m = s} 1$. 另一方面, 又由

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-t} \right)^m &= (1-t)^{-m} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!} \\ &\quad (-1)^s t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!} t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{m+s-1}^s t^s, \end{aligned}$$

由幂级数展开的唯一性, 即知 $P_s = C_{m+s-1}^s$.

(B) 根据

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy},$$

令 $y = \frac{\frac{h}{1+x^2}}{1 + \frac{x}{1+x^2}h}$, 就有 $\frac{x+y}{1-xy} = x+h$. 于是

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \arctan(x+h) - \arctan x \\ &= \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x = \arctan y \\ &= \arctan \left[\frac{\frac{h}{1+x^2}}{1 + \frac{x}{1+x^2}h} \right]. \end{aligned}$$

由 2869 题的结果知, 当 $|y| \leq 1$ 时, 有

$$\arctan y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小 (且 $|x| \leq 1$) 时, 有

$$y = \frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x^2}h}$$

$$= \frac{h}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2}h \right)^k.$$

于是

$$\begin{aligned} & f(x+h) - f(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left[\frac{h}{1+x^2} \right. \\ & \quad \cdot \left. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2}h \right)^k \right]^m \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m \\ & \quad \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ & \quad \cdot \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m \\ & \quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^s \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s} x^s \\ & \quad \cdot (-1)^s C_{m+s-1}^s \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} (-1)^{m+s} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s} \\ & \quad \cdot \frac{x^s}{2m+1} C_{m+s-1}^s \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n A_n,$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{n-1}^s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因此, 比较 h^n 的系数, 即得

$$\begin{aligned} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{(n)} &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5} (n-1) x^{n-2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

2875. 把函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二项式 $x+1$ 的正整数乘幂展开.

解 $f(x) = -\ln[1+(x+1)^2]$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x+1)^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n}, \end{aligned}$$

收敛域为 $|x+1| \leq 1$ 或 $-2 \leq x \leq 0$.

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 x 的负乘幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}\text{解 } f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} (|x| > 1).\end{aligned}$$

2877. 把函数

$$f(x) = \ln x$$

按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}\text{解 } f(x) &= \ln \frac{1 + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} *) \quad (x > 0).\end{aligned}$$

*) 利用 2857 题的结果.

2878. 把函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}\text{解 } f(x) &= \frac{x}{1+x} \sqrt{1+x} \\ &= \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{x+1}}} \\ &= \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x}{1+x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(-\frac{x}{1+x} \right)^n \right) \\ &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

当 $\left| \frac{x}{1+x} \right| < 1$ 即当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 级数收敛. 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 由 2689 题的结果知, 它条件收敛. 因此, 级数的收敛域为 $x \geq -\frac{1}{2}$.

2879. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

直接证明

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad f(x)f(y) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{x^{n_1}}{(n_1)!} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{y^{n_2}}{(n_2)!} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1=0}^n C_n^{n_1} x^{n_1} y^{n-n_1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y). \end{aligned}$$

上述级数在 $|x| < +\infty$ 及 $|y| < +\infty$ 上绝对收敛, 故

重新组合是允许的.

事实上, $f(x) = e^x$, 等式

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

即为指数函数的特征.

2880. 假如我们定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明: (a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;

$$(6) \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

证 由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x| < +\infty$ 内绝对收敛, 故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛, 且可重新组合. 因此, 以下的级数运算都是合理的.

(a) $\sin x \cos x$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} \frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!} \\ &\quad \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} (-1)^{n_1+n_2} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \Big] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n x^{2n+1},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\
&= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1 \text{—奇数} \\ k_2 \text{—偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!} \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k_1 \text{ 奇}, k_2 \text{ 偶}} + \sum_{k_1 \text{ 偶}, k_2 \text{ 奇}} \right) \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} 2^{2n+1}.
\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x.
\end{aligned}$$

$$(6) \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} \frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+2} \right. \\
& \quad \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \Big] \\
& \quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m x^{2m} \right. \\
& \quad \cdot \sum_{\substack{k_1+k_2=m \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \Big] \\
& = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} \\
& = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} A_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n & = \sum_{\substack{k_1+k_2=n+1 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
& \quad - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
& = \frac{1}{(2n+2)!} \\
& \quad \cdot \left[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \Big] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{k'=0,2,\dots,2n+2} C_{2n+2}^{k'} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l'=1,3,\dots,2n+1} C_{2n+2}^{l'} \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{s=0,2,\dots,2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1,3,\dots,2n+1} (-1)^s C_{2n+2}^s \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{s=0}^{2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} [1 + (-1)]^{2n+2} \\
&= 0 \quad (n=0,1,2,\dots).
\end{aligned}$$

因而得

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (|x| < +\infty).$$

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干项.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^{-1} \\
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right) \\
&\quad + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \dots \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数

的展开式:

2882. $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

解
$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

2883. $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

解 当 $x \geq 0$ 时, $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] x^{\frac{n}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}; \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时, 易知 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \cos \sqrt{|x|}$,

从而

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!},$$

故 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} (|x| < +\infty).$

从而

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-2x+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

2884. $f(x) = \ln^2(1-x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3(n-2)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right) x^{n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \right) \frac{1}{n+1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{n+1} \right] x^{n+1} \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
 &\quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} \\
 &> \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n+2} \\
 &\quad (n = 2, 3, \dots),
 \end{aligned}$$

并且有

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{C + \ln n + \epsilon_n^*}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),
 \end{aligned}$$

故它是收敛的.

当 $x = 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数,

故 $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1}$ 也发散.

因此, 级数

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1 \leq x < 1$.

*) 利用 146 题的结果.

2885. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(x) &= (1+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *) \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n+1} \\ &= x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

$(|x| \leq 1)$.

*) 利用 2869 题的结果.

2886. $f(x) = e^x \cos x$.

解 $e^x \cos x$ 为 $e^x(\cos x + i \sin x)$ 的实部. 由于

$$\begin{aligned} e^x(\cos x + i \sin x) &= e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(1+i)x]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1+i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

比较上式两端的实部,即得

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

2887. $f(x) = e^x \sin x$.

解 利用 2886 题的等式,并比较此等式两端的虚部,即得

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

2888. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} x^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{n+1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{n_2+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n \right] \\ &\quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时,通项的绝对值 ≥ 1 ,显然发散.因此,级数的收敛域为 $|x| < 1$.

2889. $f(x) = (\arctg x)^2$.

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \right)^{2*}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \Big] x^{2n} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2n} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2n} + \cdots \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{1}{2n} \right] x^{2n} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{x^n}{n} \\
& \qquad \qquad \qquad (|x| \leq 1).
\end{aligned}$$

*) 利用 2869 题的结果.

2890. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2.$

解 令 $\varphi(x) = (\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($-1 < x < 1$),
则

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
&\qquad \qquad \qquad (-1 < x < 1).
\end{aligned}$$

由于 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, 故 $a_0 = a_1 = 0$.

由 $\sqrt{1-x^2} \varphi'(x) = 2 \arcsin x$ 得

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} \varphi''(x) - \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\qquad \qquad \qquad (-1 < x < 1),
\end{aligned}$$

即

$$(1-x^2) \varphi''(x) - x \varphi'(x) = 2 \quad (-1 < x < 1).$$

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入, 并注意到 $a_0 = a_1 = 0$, 可得

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n = 2$$

或
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2,$$

也即

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n] x^n = 2$$

$$(-1 < x < 1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数,得

$$a_2 = 1, a_3 = 0,$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n \geq 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1} = 0,$$

$$a_{2k+2} = \frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

于是

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k+2} (-1 < x < 1).$$

从而得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k} (-1 < x < 1).$$

显然右端的幂级数当 $x = \pm 1$ 时均收敛,而左端的函数当 $x = \pm 1$ 时连续,故由幂级数的亚伯耳定理知,上述展式当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时也成立.

写出下列函数按变数 x 的正乘幂展开成幂级数的展开式(异于零)的前三项:

2891. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

解 方法一:

直接应用台劳公式, 先求导数, 有

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \sec x, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x, \quad f'''(0) = 2;$$

$$f^{(4)}(x) = 8\sec^4 x \operatorname{tg} x + 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x \\ + 8\sec^4 x \operatorname{tg} x,$$

$$f^{(4)}(0) = 0;$$

$$f^{(5)}(x) = 32\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 8\sec^6 x \\ + 16\sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 24\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x \\ + 32\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 8\sec^6 x,$$

$$f^{(5)}(0) = 16;$$

.....

于是,

$$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \cdots \\ = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

方法二:

当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 记 $\xi = 1 - \cos x$, 则 $|\xi| < 1$, 有

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{1 - \xi} \\ = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right]^m \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+m} \\
&\quad \cdot \frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{s+l+m-1} \frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)!(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1} \cdot \sum_{\substack{l+s=n-1 \\ l \geq 1}} \sum_{m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^m \frac{1}{(2l-1)!(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2n-1},
\end{aligned}$$

其中 $A_1 = 1$, 而当 $n \geq 2$ 时, 有

$$A_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1)!} \right]$$

$$+ \sum_{\substack{l+s=m \\ l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\dots(2k_m)!} \Bigg\}.$$

例如, 当 $n=2(l=1, s=1, m=1, k_1=1)$ 时,

得 $A_2 = \frac{1}{3}$; 当 $n=3(l=2, s=1, m=1, k_1=1;$

$l=1, s=2, m=1, k_1=2; l=1, s=2, m=2,$

$k_1=1, k_2=1)$ 时, 得 $A_3 = \frac{1}{5!} + (-1)\frac{1}{3!2!}$

$+ (-1)\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!2!} = \frac{2}{15}$, 等等. 于是有

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

2892. $f(x) = \operatorname{th} x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理, 为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小, 且幂级数中常数项为零时, 其收敛的和是很小的. 于是, 以下的写法是可以的, 取其前三项, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\ &\quad \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 - \dots \right] \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + \dots \right) \\ & = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

如果详细一些,可进一步叙述如下:

首先,可有一特殊的幂级数

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

如若 $|x| < \rho$ 且 $\frac{\frac{\rho}{2}}{1 - \frac{\rho}{3}} = 1$, 例如取 $\rho = \frac{6}{5} = 1.2$ 时,

有 $\frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^2}{3!} + \dots \leq 1$, 此时得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots \quad (|x| < 1.2).$$

易见 $A_3 = 0, A_5 = 0, A_7 = 0, \dots$. 于是, 上式

可改写为

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= 1 - \frac{x}{2} + B_1 \cdot \frac{x^2}{2!} - B_2 \cdot \frac{x^4}{4!} \\ &\quad + B_3 \cdot \frac{x^6}{6!} - \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $B_1, B_2, B_3, \dots$ 为伯努里 (Bernoulli) 常数 *),

有

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42},$$

$$B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, \dots$$

由

$$x \coth \frac{x}{2} = x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2x}{e^x - 1} + x$$

及(1)式,即得

$$\frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = 1 + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} - \dots$$

于是

$$\begin{aligned} x \operatorname{cth} x &= 1 + B_1 \frac{2^2 x^2}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^4}{4!} \\ &\quad + B_3 \frac{2^6 x^6}{6!} - \dots \end{aligned}$$

若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} x &= \frac{1}{x} + B_1 \frac{2^2 x}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^3}{4!} \\ &\quad + B_3 \frac{2^6 x^5}{6!} - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

注意到

$$\operatorname{th} x = 2 \operatorname{cth} 2x - \operatorname{cth} x$$

及当 $x=0$ 时, $\operatorname{th} x=0$, 由(2)式即有

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{B_1}{2!} (2^4 - 2^2) x - \frac{B_2}{4!} (2^8 - 2^4) x^3 \\ &\quad + \frac{B_3}{6!} (2^{12} - 2^6) x^5 - \dots \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

还可指出的是, 它的系数与 $\operatorname{tg} x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的, 两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节), 而 $\operatorname{tg} x$ 的幂级数展开式当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛,

故上述的级数(3)当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*)参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

2893. $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$.

解 与 2892 题的想法一样, 可以考虑 $x \neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形. 于是有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \cdot \left[1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right)^2 + \dots \right] - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{31}{15120}x^6 + \dots \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \dots \right) \\ &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \end{aligned}$$

$$(0 < |x| < \pi).$$

一般说来, 为求通项可作如下进一步的讨论:

考虑当 $x \neq 0$ 时, $g(x) = xf(x) = x\operatorname{ctg} x - 1$, 而当 $|x| < \pi$ 时, 有

$$g(x) = x\operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} - 1 = \frac{\cos x}{1 - \xi} - 1,$$

其中

$$\xi = 1 - \frac{\sin x}{x},$$

注意到 $|\sin x| < |x|$, 故 $|\xi| < 1$. 因而

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m - 1 \\ &= \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \right] \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m \right) - 1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m. \end{aligned}$$

由于

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

故有

$$\begin{aligned} \xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\cdots(2k_m+1)!} \\ &= \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{s+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s},$$

其中

$$A_s = \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1 + 1)! \dots (2k_m + 1)!} \\ (s = 1, 2, \dots).$$

又有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m+l} \\ \cdot \frac{x^{2s+2l}}{(2l)! (2k_1 + 1)! \dots (2k_m + 1)!} \\ = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n},$$

其中

$$B_n = \sum_{\substack{s+l=n \\ s \geq 1, l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2l)! (2k_1 + 1)! \dots (2k_m + 1)!} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

于是,

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n},$$

其中

$$P_1 = - \left(A_1 + \frac{1}{2} \right),$$

$$P_n = (-1)^n \left[A_n + \frac{1}{(2n)!} + B_n \right] \quad (n = 2, 3, \dots).$$

因此,最后得知:当 $0 < |x| < \pi$ 时,有

$$f(x) = \frac{1}{x} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n-1}.$$

经计算可得前几项如下:

$$A_1 = -\frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{7}{360}, \quad A_3 = -\frac{31}{15120};$$

$$B_2 = -\frac{1}{12}, \quad B_3 = \frac{1}{360}.$$

从而得

$$P_1 = -\frac{1}{3}, P_2 = -\frac{1}{45}, P_3 = -\frac{2}{945}.$$

因此有

$$f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 \\ - \frac{2}{945}x^5 - \dots.$$

2894. 设 $\sec x$ 的展开式写成下形:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

求出关于系数 E_n (尤拉数) 的递推公式.

解 在等式

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$$

的两端同乘 $\cos x$, 并注意 $\cos x$ 的展开式, 就有

$$\begin{aligned}
1 &= \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.
\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性, 就有 $A_0 = E_0 = 1$, 而 $A_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$ 其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},
\end{aligned}$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0 (n = 1, 2, \dots)$$

例如已知 E_0 , 由上式令 $n=1$, 即得 $E_1 - E_0 = 0$, 从而 $E_1 = E_0 = 1$. 由 E_0, E_1 , 令 $n=2$, 又可推出 $E_2, \dots$, 等等. 一般说来, 由 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, 从上式可推出 E_n .

2895. 将函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x| < 1)$$

展开成幂级数.

解 只要 $x^2 + 2|tx| < 1$, 函数 $f(x)$ 就有展开的可能性. 记 x^n 的系数为 $P_n(t)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \cdots + P_n(t)x^n + \cdots, \quad (1)$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可. 为此, 对(1)式两端同时对 x 求导数, 得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(t) + 2P_2(t)x + \cdots + nP_n(t)x^{n-1} + \cdots,$$

把上式与(1)式比较, 易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_nx^{n-1}) \\ = (t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$P_1(t) = t,$$

$$2P_2(t) - 2tP_1(t) = tP_1(t) - 1,$$

.....

$$(n+1)P_{n+1}(t) - 2ntP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) \\ = tP_n(t) - P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t) = t,$$

$$P_2(t) = \frac{3t^2-1}{2},$$

.....

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \quad (2)$$

例如, 取 $n=2$, 则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$P_3(t) = \frac{5}{3}t \cdot \frac{3t^2-1}{2} - \frac{2}{3}t \\ = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \left[t^3 - \frac{3 \cdot 2}{2(2 \cdot 3 - 1)} t \right].$$

一般说来,由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right] \\ (n \geq 1, \text{勒襄德多项式}).$$

2896. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 写出函数 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

解
$$F(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} x^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} x^{n_2} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} a_{n_1} \right) x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n \quad (|x| < 1).$$

2897. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2 , 则级数

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$; (6) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$

的收敛半径 R 是怎样的?

解 (a) 记 $A_n = a_n + b_n$, 则有

$$\sqrt[n]{|A_n|} = \sqrt[n]{|a_n + b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \\ \leq \sqrt[n]{2 \max(|a_n|, |b_n|)} \\ = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\max(|a_n|, |b_n|)}$$

$$= \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \right\} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} \\ &= \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right\} \\ &= \max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned}$$

从而得

$$R \geq \frac{1}{\max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right)} = \min(R_1, R_2).$$

(6) 记 $B_n = a_n b_n$, 则有

$$\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \} \\ &\leq \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \cdot \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right\} \\ &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2}, \end{aligned}$$

故得

$$R \geq R_1 R_2.$$

2898. 设

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ 和 } L = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

证明幂级数的收敛半径 R 满足下述不等式

$$l \leq R \leq L.$$

证 记 $l_1 = \frac{1}{l}$, $L_1 = \frac{1}{L}$. 注意 $l \geq 0, L \geq 0$. 若 $l = 0$, 则记 $l_1 = +\infty$; 若 $l = +\infty$, 则记 $l_1 = 0$. 对 L 与 L_1 也作同样规定. 易见 $L_1 \leq l_1$. 任给 $\varepsilon > 0$, 总可选 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使

$$\frac{1}{1+\delta_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{1-\delta_2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1, δ_2 而言, 存在自然数 m , 使当 $n > m$ 时, 有

$$l \cdot (1 - \delta_2) < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < L \cdot (1 + \delta_1)$$

或

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{1+\delta_1} < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n > m$ 时, 有

$$L_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l_1 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n > m$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_m|} &= \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} \\ &< \left[l_1 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]^{n-m} \end{aligned}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < \left(\frac{|a_m|}{l_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (1)$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > \left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (2)$$

注意到若 $A > 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1$, 故存在充分大的 $n_0 (> m)$, 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(\frac{|a_n|}{l_1^n} \right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 + \frac{\epsilon}{2}}$$

及

$$\left(\frac{|a_n|}{L_1^n} \right)^{\frac{1}{n}} > 1 - \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{\epsilon}{2}}. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式及(2)式, 即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < 1 + \epsilon \text{ 及 } \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > 1 - \epsilon.$$

于是有

$$L_1 \cdot (1 - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq l_1 \cdot (1 + \epsilon).$$

从而得

$$\frac{1}{l_1(1 + \epsilon)} \leq R \leq \frac{1}{L_1(1 - \epsilon)} \quad *).$$

即

$$\frac{l}{1 + \epsilon} \leq R \leq \frac{L}{1 - \epsilon}.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即知

$$l \leq R \leq L.$$

*) 若 $L_1 = +\infty$, 即 $L = 0$, 此时显然有 $R = 0$ (级数除 $x_0 = 0$ 点收敛以外, 对任一点 $x \neq x_0$ 均发散), 故可设 $L_1 < +\infty$.

2899. 证明: 若函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 且

$$|n!a_n| < M (n = 1, 2, \dots),$$

其中 M 是常数, 则: 1) $f(x)$ 在任一点 a 可微分无限多次; 2) 下述展开式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

证 1) 由于 $|n!a_n| < M$, 故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!} (n = 1, 2, \dots).$$

设 $[-N, N]$ 是包含 x_0 的任一有限区间. 由于

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{M}{n!} (2N)^n$$

及级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} (2N)^n$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛, 即其收敛半径 $R = +\infty$. 于是, 此级数在任一点 $a \in (-\infty, +\infty)$ 可逐项微分任意多次.

$$2) \text{ 由 1) 段已证可知级数 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在任何点可逐项微分任意多次, 故

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &\quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

今设 $|x-a| < R$ (R 为任意固定的正数), 于是

$$\begin{aligned}|x - x_0| &\leq |x - a| + |a - x_0| \\ &< R + |a - x_0| = L,\end{aligned}$$

故由假定知

$$\begin{aligned}|f^{(m)}(x)| &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |a_n| \cdot L^{n-m} \\ &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!} L^{n-m} \\ &= M \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP (m = 1, 2, \dots),\end{aligned}$$

其中 $P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty$.

考虑余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

的拉格朗日形式

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \\ &\quad (0 < \theta < 1).\end{aligned}$$

于是, 当 $|x-a| < R$ 时, 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{MP}{(n+1)!} R^{n+1} (n = 1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

由此可知, 当 $|x-a| < R$ 时, 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

成立. 再由 $R > 0$ 的任意性即知, 此展式对一切 $x (|x| < +\infty)$ 皆成立. 证毕.

2900. 证明: 若 1) $a_n \geq 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

证 首先, 如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

收敛, 则根据亚伯耳定理可知, 函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在点 $x = R$ 处左连续. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

其次, 我们证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

发散是不可能的. 采用反证法, 引出矛盾. 事实上, 根据

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ 知, 对于任取的正整数 $A > S$, 总存在正整数 N , 使有

$$\sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S,$$

故对任意的 $\epsilon > 0$, 例如取 $\epsilon = \frac{A-S}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in (R-\delta, R)$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n x^n &> A - \epsilon \\ &= A - \frac{A-S}{2} = \frac{1}{2}(A+S) > A > S. \end{aligned}$$

注意到 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n (x \geq 0)$, 即得

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq A > S,$$

此与假设 $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ 相矛盾. 因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一定收敛. 从而命题获证.

将下列函数展成幂级数:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt.$

解
$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \end{aligned}$$

($|x| < +\infty$).

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

解
$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \\ &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{4n} \right) dt \end{aligned}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \leq 1).$$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

$$= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} (|x| < +\infty).$$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

解 $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} (|x| \leq 1).$$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$ (写出四项).

解 令 $0 < |t| < 1$, 注意

$$\frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

$$= 1 - \xi,$$

其中 $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$. 容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的, 且其和有性质 $|\xi| < 1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = \frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n.$$

因而当 $|x| < 1$ 时,得

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t}\ln(1+t)} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1-\xi} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \right) dt. \end{aligned}$$

为求四项近似,取到 t^3 为止足够,有

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 1, \\ \xi^1 &= \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} - \dots, \\ \xi^2 &= \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \dots, \\ \xi^3 &= \frac{t^3}{8} - \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} - \dots.$$

从而当 $|x| < 1$ 时,得原积分的前四项为

$$\begin{aligned} &\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} \\ &= \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} \right) dt + O(x^5) \\ &= x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + O(x^5). \end{aligned}$$

运用逐项微分法计算下列级数的和:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots.$

解 设 $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$. 在收敛域 $|x| < 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

解 设 $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

于是, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

解 设 $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. 在收敛域 $|x| < +\infty$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

于是有

$$F(x) - F'(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^{-x}, \quad (1)$$

$$F(x) + F'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x. \quad (2)$$

将(1)式和(2)式相加,最后得

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$(|x| < +\infty).$$

2909. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$.

解 设 $F(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之,得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \cdots \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \right) \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} [-\ln(1-x)] \end{aligned}$$

$$(0 < |x| < 1).$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x F'(t) dt \\ &= 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,级数收敛于零. 当 $x=1$ 时,级数收敛于 1.

当 $x=-1$ 时,级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right) + 1$$

$$= 1 - 2\ln 2.$$

于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & \text{当 } 0 < |x| < 1; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1 - 2\ln 2, & \text{当 } x = -1; \\ 1, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

2910. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

解 设 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

在收敛域内逐项微分之,得

$$F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}2x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}3x^2 + \dots$$

以 $1-x$ 乘上式两端,得

$$(1-x)F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2}F(x),$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{2(1-x)}.$$

积分得

$$\ln F(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

或

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时, 应用拉阿伯判别法:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

因此, 级数是发散的.

当 $x = -1$ 时, 利用 2689 题的结果知, 级数条件收敛. 于是,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} (-1 \leq x < 1).$$

运用逐项积分法计算下列级数的和:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$.

解 设 $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots \\ &= (x^2 + x^3 + x^4 + \dots) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) \\ &= x(1 + x + x^2 + \dots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) \\ &= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left[\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \right]'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x| = 1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故它是发散的.

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$.

解 设 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \dots \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4 \\ &\quad - \left(3 + \frac{1}{5}\right)x^5 + \dots \\ &= x + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) \\ &\quad - x^3(1 - 2x + 3x^2 - \dots) \\ &= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \dots)' \\ &= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)' \\ &= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n \\ &= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \right]' \\ &= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数显然发散.

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$.

解 设 $F(x) = 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots \\ &= x(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) \\ &= x \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \quad (*) = \frac{x^2}{(1-x)^2} (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

2914. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)} = y.$$

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, & y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, \\ y''' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, & y^{(4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}. \end{aligned}$$

于是,

$$y^{(4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$$

2915. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy'' + y' - y = 0.$$

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & xy'' + y' \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} \right] x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y, \end{aligned}$$

从而得

$$xy'' + y' - y = 0.$$

求在复数域内 $(z = x + iy)$ 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

2916. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}.$

解 记 $c_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$; 收敛圆为

$$|z - 1 - i| < 2 \quad \text{即} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2^2.$$

$$2917. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

解 记 $c_n = \frac{(1+i)^n}{n(n+1)}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 收敛圆为

$$|z| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{即 } x^2 + y^2 < \frac{1}{2}.$$

$$2918. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}.$$

解 记 $c_n = \frac{n!}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+(n+1)i|}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+1} = 1, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛圆为

$$|z| < 1 \quad \text{即 } x^2 + y^2 < 1.$$

$$2919. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{a+i\beta}}.$$

解 记 $c_n = \frac{1}{n^{a+i\beta}}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^{a+i\beta} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^a = 1, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛圆为

$$|z| < 1 \quad \text{即} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

$$2920. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}.$$

解 记 $c_n = \frac{1}{n(1 - e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} (1 - e^{i\alpha}) \right| \\ &= |1 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)| = \sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \\ &= \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|$; 收敛圆为

$$|z - e^{i\alpha}| < \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|,$$

即

$$(x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 < 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

2921. 利用牛顿的二项公式, 近似地计算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt[3]{9} &= 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8^3} - \dots \right). \end{aligned}$$

当只取展开式的头三项时, 误差

$$|R_3| < 2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3^3} \cdot \frac{1}{8^3} = \frac{10}{3^4 \cdot 8^3} < 0.001.$$

计算头三项, 每一项取到小数点后四位, 即得

$$\sqrt[3]{9} \doteq 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{8^2} \right)$$

$$\doteq 2.080.$$

2922. 近似地计算: (a) $\operatorname{arctg} 1.2$; (b) ${}^{10}\sqrt{1000}$;

(c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (d) $\ln 1.25$, 并估计对应的误差.

解 (a) 利用

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

并设 $x=1$, $\frac{x+y}{1-xy}=1.2$, 即得 $y=\frac{1}{11}$. 于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} 1.2 &= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{11} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11} \right)^5 - \dots\end{aligned}$$

若取头三项^{*}, 则其误差

$$|R_3| < \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{11} \right)^5 < 10^{-5}.$$

计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\operatorname{arctg} 1.2 \doteq 0.87606.$$

$$(b) {}^{10}\sqrt{1000} = {}^{10}\sqrt{1024-24} = 2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}$$

$$= 2 \left[1 - \frac{0.024}{10} + \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right)}{2!} (0.024)^2 - \dots \right].$$

若取头三项, 注意到上述级数的各项递减, 故其误差

$$\begin{aligned}|R_3| &< 2 \cdot \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) \left(\frac{1}{10} - 2 \right)}{3!} \\ &\quad \cdot (0.024)^3 [1 + 0.024 + (0.024)^2 + \dots] \\ &< 10^{-6}.\end{aligned}$$

计算头三项, 每一项取到小数点后七位, 即得

$${}^{10}\sqrt{1000} \doteq 1.995263.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(B)} \quad \frac{1}{\sqrt{e}} &= e^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \\
 &\quad - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} - \dots
 \end{aligned}$$

若取头七项, 则其误差

$$|R_7| < \frac{1}{7! \cdot 2^7} < 10^{-5}.$$

计算头七项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0.60653.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(r)} \ln 1.25 &= \ln \left(1 + \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} \\
 &\quad + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{6 \cdot 4^6} + \dots
 \end{aligned}$$

若取头六项, 则其误差

$$|R_6| < \frac{1}{7 \cdot 4^7} < 10^{-5}.$$

计算头六项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\ln 1.25 \doteq 0.22314.$$

*) 本题并未注明取多少项以估计误差, 因此, 我们可任意选取. 各小题均类似处理.

利用适当的展开式, 计算下列函数准确到所指出的程度的值.

2923. $\sin 18^\circ$, 准确到 10^{-5} .

$$\text{解} \quad \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}$$

$$= \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! 10^3} + \frac{\pi^5}{5! 10^5} - \dots$$

上述级数为交错级数,若取头 n 项,则其误差

$$\triangle < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2n+1}.$$

欲使 $\triangle < 10^{-5}$, 只要

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2n+1} < 10^{-5},$$

以 $n=3$ 代入上式即满足 ($n=2$ 达不到要求的准确程度). 计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

2924. $\cos 1^\circ$, 准确到 10^{-6} .

$$\text{解 } \cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 - \dots$$

取 $n=2$, 即可保证 $\triangle < \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 < 10^{-6}$. 计算得

$$\cos 1^\circ \doteq 0.999848.$$

2925. $\text{tg} 9^\circ$, 准确到 10^{-3} .

$$\text{解 } \text{tg} 9^\circ = \text{tg} \frac{\pi}{20}$$

$$= \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 + \dots *).$$

若取头二项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\triangle < \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 \left[1 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 + \dots \right] < 10^{-3}.$$

取两项计算, 每一项取到小数点后四位, 计算得

$$\text{tg} 9^\circ \doteq 0.158.$$

*) 利用 2891 题的结果.

2926. e , 准确到 10^{-6} .

解 $e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}.$

若取 $1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}.\end{aligned}$$

欲 $\Delta < 10^{-6}$, 只要 $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$, 也即只要

$$n!n > 10^6.$$

取 $n = 9$ 即可. 于是, 当每项取到小数点后七位, 即得

$$e \doteq 1 + \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n!} \doteq 2.718282.$$

2927. $\ln 1.2$, 准确到 10^{-4} .

解 $\ln 1.2 = \ln(1+0.2)$

$$= 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 + \cdots.$$

若取头 n 项, 则其误差

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

欲 $\Delta < 10^{-4}$, 只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} < 10^{-4}$. 取 $n=4$ 即可保证

$$\Delta < \frac{1}{5}(0.2)^5 < 10^{-4}.$$

于是, 当每项取到小数点后五位, 即得

$$\begin{aligned}\ln 1.2 &\doteq 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \\ &\doteq 0.1823.\end{aligned}$$

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

求数 π , 准确到 10^{-4} .

解 $\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$

$$= 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^9 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{11} + \dots \right].$$

若取头六项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\begin{aligned} \triangle &< 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \\ &\quad \cdot \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2} \right)^{13} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots \right] \\ &< 10^{-4}. \end{aligned}$$

取头六项计算, 每一项取到小数点后五位, 即得

$$\pi \doteq 3.1416.$$

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$$

计算数 π , 准确到 0.001.

解 按题设, 有

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \dots \right). \end{aligned}$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的,所以在被加数与加数中,弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0 < \triangle_1 < \frac{4}{11 \cdot 2^{11}} < 0.0002,$$

$$0 < \triangle_2 < \frac{4}{9 \cdot 3^9} < 0.00002,$$

于是,总误差 $\triangle \leq \triangle_1 + \triangle_2 < 0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位(末位由四舍五入而得),即可保证达到所需误差. 列成下表(括号中的正、负号指示校正数的符号):

正 项	负 项
$\frac{4}{2} = 2.0000$	$\frac{4}{3 \cdot 2^3} = 0.1667(-)$
$\frac{4}{5 \cdot 2^5} = 0.0250$	$\frac{4}{7 \cdot 2^7} = 0.0045(-)$
$\frac{4}{9 \cdot 2^9} = 0.0009(-)$	$\frac{4}{3 \cdot 3^3} = 0.0494(-)$
$\frac{4}{3} = 1.3333(+)$	$+) \frac{4}{7 \cdot 3^7} = 0.0003(-)$
$+) \frac{4}{5 \cdot 3^5} = 0.0033(-)$	
	0.2209
3.3625	
0.2209	
3.1416	

于是,

$$3.1415 < \pi < 3.1420.$$

因此,取 $\pi \doteq 3.142$ 即可准确到 0.001.

2930. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

求数 π , 准确到 10^{-9} .

解 在此, 我们证明一下 2929 题及本题中的恒等式.
如果, 注意到反正切函数的加法公式

$$\begin{aligned} & \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \left(|x+y| < \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \quad \text{或} \quad (1+x)(1+y) = 2$$

的真分数作为 x, y , 就有

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y.$$

例如, 令 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$, 即得

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}.$$

这就是 2929 题中所出现的恒等式.

如果令 $x = \frac{1}{5}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} = \alpha$, 则 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \doteq 1.$$

可见, $4\alpha \doteq \frac{\pi}{4}$.

$$\text{令 } \beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

于是,

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

由此,得

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } \pi &= 16\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - 4\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} \\ &= 16 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5^{13}} - \dots \right\} \\ &\quad - 4 \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

这就是本题中所出现的恒等式,它就是著名的马信(J. Machin)公式.

我们要依靠此式计算 π , 准确到 10^{-9} , 只要上面已写出的那些项就够了. 事实上, 这两个级数都是莱布尼兹型的, 所以在被减数与减数中, 弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{15 \cdot 15^{15}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}$$

$$\text{与 } 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}$$

于是, 总误差

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < \frac{1}{10^9}.$$

计算保留下来的项近似到小数点后十位,列成下表
(括号中的 $\pm$ 号指示校正数的符号):

$$\begin{array}{r}
 \frac{16}{5} = 3.2000000000 \\
 \frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0.0010240000 \\
 \frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0.0000009102(+) \\
 +) \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} = 0.0000000010(+) \\
 \hline
 3.2010249112 \\
 -) \quad 0.0426959536 \\
 \hline
 3.1583289576 \\
 \\
 \frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0.0426666667(-) \\
 \frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0.0000292571(+) \\
 +) \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0.0000000298(-) \\
 \hline
 0.0426959536 \\
 \\
 \frac{4}{239} = 0.0167364017(\quad) \\
 -) \frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0.0000000977(\quad) \\
 \hline
 0.0167363040
 \end{array}$$

于是,

$$3.1583289576 < 16\alpha < 3.1583289577,$$

$$-0.0167363040 = -4\beta = -0.0167363040;$$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta,$$

$$3.1415926536 < \pi < 3.1415926537.$$

因此,取 $\pi \doteq 3.141592654$ 可准确到 10^{-9} ,并且可知:如

取 $\pi \doteq 3.141592653 \cdots$ 所有写出的数字都是真确的。

2931. 利用公式

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots \right]$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 准确到 10^{-5} .

解 当 $n=1$ 时,

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \cdots \right).$$

如取已写出的那些项计算 $\ln 2$, 即知

$$\begin{aligned} 0 < \triangle < 2 \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \cdots \right) \\ < \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} < \frac{2}{10^6}. \end{aligned}$$

计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} & = & 0.666667(-) \\ \frac{2}{3 \cdot 3^3} & = & 0.024691(+) \\ \frac{2}{5 \cdot 3^5} & = & 0.001646(+) \\ \frac{2}{7 \cdot 3^7} & = & 0.000131(-) \\ +) \quad \frac{2}{9 \cdot 3^9} & = & 0.000011(+) \\ \hline & & 0.693146 \end{array}$$

$$\therefore 0.693146 < \ln 2 < 0.693148.$$

于是, $\ln 2 = 0.69314 \cdots$, 并且所有写出来的五位数字都是真确的. 如果, 将第六位四舍五入, 即得 $\ln 2 \doteq 0.69315$, 准确到 10^{-5} .

令 $n=2$, 即得

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \right) + \dots \quad (1)$$

与 $\ln 2$ 一样, 取写出的诸项, 计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{5} = 0.400000 \\ \frac{2}{3 \cdot 5^3} = 0.005333(+), \\ \frac{2}{5 \cdot 5^5} = 0.000128 \\ \frac{2}{7 \cdot 5^7} = 0.000004(-) \\ +) \frac{2}{9 \cdot 5^9} = 0.000000(+) \\ \hline 0.405465 \end{array}$$

于是, (1) 式右端的级数的和为 $0.40546\dots$, 并且写出来的五位数字都是真确的, 如将第六位四舍五入, 也得 0.40547 .

最后, 由 (1) 式得

$$\ln 3 \doteq 0.693146\dots + 0.405465\dots = 1.09861\dots,$$

并且所有写出来的数字都是真确的.

如果将第六位四舍五入, 即得

$$\ln 3 \doteq 0.69315 + 0.40546 = 1.09861,$$

它准确到 10^{-5} .

2932. 利用被积函数展成级数的展开式以计算下列积分之值, 并准确到 0.001 :

$$(a) \int_0^1 e - x^2 dx; \quad (b) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$$

$$(B) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx; \quad (r) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(Д) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx; \quad (e) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(ж) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}; \quad (з) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(и) \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(к) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} dx; \quad (л) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} dx;$$

$$(м) \int_0^1 x^x dx.$$

解 (a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$= \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,$$

如取写出来的诸项, 计算到小数点后四位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} 1 = 1.0000 \\ \frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000 \\ +) \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.0046(+) \\ \hline 1.1046 \\ -) 0.3571 \\ \hline 0.7475 \\ \frac{1}{3} = 0.3333(+) \\ +) \frac{1}{7 \cdot 3!} = 0.0238(+) \\ \hline 0.3571 \end{array}$$

于是,

$$0.7473 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 0.7476,$$

即有 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \doteq 0.747$, 准确到 0.001, 并且所有写出来的数字都是真确的.

$$\begin{aligned} (6) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2! x^2} + \frac{1}{3! x^3} + \frac{1}{4! x^4} + \dots \right) dx \\ &= 2 + \ln 2 + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{3}{3! \cdot 32} + \frac{7}{4! \cdot 192} + \dots \\ &= 2 + 0. \overset{(+)}{6} 931 + 0.1250 + 0.015 \overset{(+)}{6} + 0.001 \overset{(+)}{5} + \dots \\ &\doteq 2.8352 \quad (0 < \Delta < 0.001). \end{aligned}$$

于是,

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \doteq 2.835,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (B) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^2 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx \\ &= 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \dots, \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta < \frac{2^9}{9 \cdot 9!}$

$< \frac{1}{10^3}$. 列表如下:

$$2 = 2.0000$$

$$\begin{array}{r}
 +) \frac{2^5}{5 \cdot 5!} = 0.0533(+) \\
 \hline
 2.0533 \\
 -) 0.4480 \\
 \hline
 1.6053 \\
 \\
 \frac{2^3}{3 \cdot 3!} = 0.4444(+) \\
 +) \frac{2^7}{7 \cdot 7!} = 0.0036(+) \\
 \hline
 0.4480
 \end{array}$$

于是,

$$1.6051 < \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx < 1.6054,$$

即

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \doteq 1.605,$$

并且所有写出的数字都是真确的.

$$\begin{aligned}
 (r) \quad & \int_0^1 \cos x^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx \\
 &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,
 \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta <$

$\frac{1}{13 \cdot 6!} < \frac{1}{10^3}$. 列下表:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1.0000 \\
 +) \frac{1}{9 \cdot 4} = 0.0046(+) \\
 \hline
 1.0046 \\
 -) 0.1000 \\
 \hline
 0.9046
 \end{array}$$

$$\frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000$$

$$\frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000$$

所以

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.9046.$$

于是,

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.905,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (\text{Д}) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) dx \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} + \dots, \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差

$$\begin{aligned} 0 < \triangle &< \frac{1}{7 \cdot 7!} \left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^2}} < 10^{-3}. \end{aligned}$$

列下表:

$$\begin{array}{r} 1 = 1.0000 \\ \frac{1}{3 \cdot 3!} = 0.0556(-) \\ +) \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.0017(+) \\ \hline 1.0573 \end{array}$$

于是,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \doteq 1.057,$$

准确到 0.001.

(e) 当 $x \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}I &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \dots.\end{aligned}$$

取前两项的近似值就有

$$I = 0.119 + \theta \quad (0 < \theta < 0.001).$$

或者用直接积分法:

$$\begin{aligned}&\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_2^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \ln 3$$

$$\doteq 0.119,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (\text{ж}) \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^4}{3^2 \cdot 2!} + \dots, \end{aligned}$$

故得

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^5} + \dots \doteq 0.337,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 + \dots \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{9 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \dots 45}{93 \cdot 2^{23} \cdot 23!} + \dots \\ &= (1.0000 + 0.0417 + 0.0160 + 0.0090 \\ &\quad + 0.0060 + 0.0043 + 0.0033 + 0.0026 \\ &\quad + 0.0022 + 0.0018 + 0.0014 + 0.0012) \\ &\quad - (0.1000 + 0.0240 + 0.0117 + 0.0072 \\ &\quad + 0.0050 + 0.0037 + 0.0029 + 0.0024 \\ &\quad + 0.0020 + 0.0016 + 0.0013 + 0.0010) + \dots \\ &\doteq 0.927, \end{aligned}$$

$$0 < \triangle < \frac{1 \cdot 3 \dots 47}{97 \cdot 2^{24} \cdot 24!} < 10^{-3}.$$

(и) 注意, 当 $10 \leq x \leq 100$ 时, 有

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x}\right)^n.\end{aligned}$$

于是,得

$$\begin{aligned}I &= \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \\ &= \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{10}^{100} x^{-n-1} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{1}{10^n} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \\ &= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{4 \cdot 10^2} \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{9 \cdot 10^3} \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \dots \\ &\doteq 8.040,\end{aligned}$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}(\kappa) \quad &\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{1}{5^2 \cdot 2^5} - \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} + \dots,\end{aligned}$$

如取前三项计算积分值,则其误差

$$0 < \triangle < \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} < \frac{1}{10^3}.$$

于是,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \doteq 0.487 \text{ (准确到 0.001).}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{Л}) \quad & \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 2^5} + \dots,
 \end{aligned}$$

如取前三项计算积分值, 则其误差

$$\begin{aligned}
 0 < \triangle &< \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{2^7} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\
 &< \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} < \frac{1}{10^3}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx \doteq 0.507 \text{ (准确到 } 0.001 \text{)}.$$

(М) 注意到

$$\begin{aligned}
 x^x &= e^{x \ln x} \\
 &= 1 + x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2!} + \dots \\
 &\quad + \frac{(x \ln x)^n}{n!} + \dots,
 \end{aligned}$$

$$\text{并有 } \int_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} *).$$

于是,

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \dots,$$

如取前四项计算积分值, 则其误差

$$0 < \triangle < \frac{4!}{4! \cdot (4+1)^{4+1}} = \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^3},$$

$$\text{故 } \int_0^1 x^x dx \doteq 0.783 \text{ (准确到 } 0.001 \text{)}.$$

*) 参看 2286 题, $m=n$.

2933. 求正弦曲线

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

波之弧长, 并准确到 0.01.

解 弧长 s 为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cos^4 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cos^6 x - \dots \right) dx. \end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n! \cdot n!} \quad *),$$

即有

$$\begin{aligned} s &= 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \cdot 2!}{2^4} - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 3!} - \dots \right] \\ &= \pi \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \dots \right), \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算 s 值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\pi}{4! \cdot 2^4} \cdot \frac{8!}{2^9 \cdot 4! \cdot 4!} < \frac{1}{10^2}.$$

于是,

$$s \doteq 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \doteq 3.83.$$

*) 利用 2290 题的结果, $m=0$.

2934. 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$, 求椭圆的弧长, 并准确到 0.01.

解 椭圆的参数方程为 $x = a \sin t, y = b \cos t$.

于是,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. 从而得

$$\begin{aligned} s &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \sin^2 t - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} \epsilon^4 \sin^4 t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \epsilon^6 \sin^6 t - \dots \right) dt \\ &= 4a \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cdot \frac{\pi \cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} \epsilon^4 \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \epsilon^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 3!} - \dots \right), \end{aligned}$$

如取写出的前五项计算 s 值, 则其误差 $0 < \Delta < 10^{-2}$.

再以 a, b 值代入, 即得

$$\begin{aligned} s &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{64} \cdot \frac{9}{16} - \frac{5}{256} \cdot \frac{27}{64} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5 \cdot 27 \cdot 3}{256 \cdot 64 \cdot 4} - \dots \right) \\ &\doteq 2\pi (1 - 0.188 - 0.026 - 0.008 - 0.003 - \dots) \\ &\doteq 4.84. \end{aligned}$$

2935. 电线是扯在两根木桩上, 两桩的距离为 $2l = 20$ 米, 电线成抛物线的形状. 设凹处的矢 $h = 40$ 厘米, 计算电线的长度, 并准确到 1 厘米.

解 先建立抛物线 AOB 的方程.

取坐标系如图 5·2 所示, 则方程的标准形式为

$$x^2 = 2py.$$

由于此抛物线过点 $B(10, 0.4)$, 所以

$$10^2 = 2p(0.4), p = 125,$$

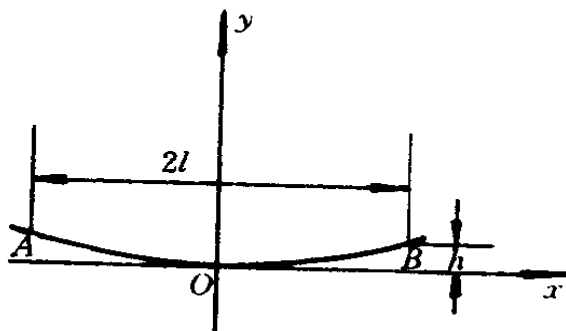


图 5.2

即

$$y = \frac{1}{250}x^2.$$

于是, 所求的电线长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{125}x\right)^2} dx \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \sqrt{1+t^2} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2}t^4 + \frac{1 \cdot 3}{3!} \frac{1}{2^3}t^6 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} \frac{1}{2^4}t^8 + \dots \right) dt \\ &= 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5 \cdot 2!} \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} + \dots \right), \end{aligned}$$

如取前两项计算积分值, 则其误差

$$0 < \triangle < \frac{250}{5 \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} < 10^{-2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} s &= 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right) \\ &\doteq 20 + 0.02 = 20.02 (\text{米}), \end{aligned}$$

即所求的电线长为 20.02 米, 准确到 0.01 米.

§ 6. 福里叶级数

1° 展开定理 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$, 并且一切不连续点 ξ 是正则的 [即 $f(\xi) = \frac{1}{2} [f(\xi-0) + f(\xi+0)]$], 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用福里叶级数表出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

及

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2')$$

特别是:

(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

式中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots);$

(6) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

式中, $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n=1, 2, \dots)$.

一个在区间 $(0, l)$ 中有定义的并具有上面所提到的连续条件的函数 $f(x)$, 可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2°完全性条件 对于任一在区间 $(-l, l)$ 上可积的且其平方也是可积的函数 $f(x)$, 作具有系数(2), (2')的级数(1), 则李雅甫诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3°福里叶级数的积分法 在区间 $(-l, l)$ 内按黎曼意义可积分的函数 $f(x)$ 之福里叶级数(1) (即使是发散的), 可以在 $(-l, l)$ 内逐项积分.

2936. 将函数

$$f(x) = \sin^4 x$$

展开成福里叶级数.

解 在 $[-\pi, \pi]$ 上, 函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成福里叶级数有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

由于

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} \cos nx - \frac{1}{2} \cos 2x \cos nx + \frac{1}{8} \cos 4x \cos nx \right) dx$$

$$= \begin{cases} 0, n \neq 2, n \neq 4, \\ -\frac{1}{2}, n = 2, \\ \frac{1}{8}, n = 4; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \sin nx dx = 0 (n = 1, 2, \dots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续, 故其福里叶级数收敛于函数本身, 即

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

注 由此题可以看出, 周期为 2π 的三角多项式的福里叶级数就是它本身, 下面一题将给出一般的证明.

2937. 三角多项式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

的福里叶级数是怎样的?

解 $p_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 不妨在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成福里叶级数. 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) dx = 2\alpha_0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \cos nx dx$$

$$= a_n;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \sin nx dx$$

$$= \beta_n.$$

于是,在 $[-\pi, \pi]$ 上,有

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix), \end{aligned}$$

即 $p_n(x)$ 的福里叶级数就是它本身.

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展开为福里叶级数.

绘出函数的图形及此函数之福里叶级数之若干部分和的图形.

利用展开式,求莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

的和.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cos nx dx = 0;$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n],
 \end{aligned}$$

又函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有一个第一类间断点, 故其福里叶级数收敛, 且有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$f(x)$ 及其福里叶级数之若干部分和的图形如图 5.3 所示, 其中画的是一项 S_1 、两项之和 S_2 及 $f(x)$ 的图形.

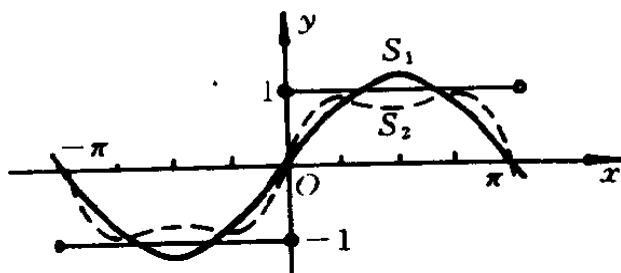


图 5.3

若令 $x = \frac{\pi}{2}$, 则得

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1,$$

即莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为福里叶级数:

2939. 在区间 $(0, 2l)$ 内展开

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{若 } 0 < x < l; \\ 0, & \text{若 } l < x < 2l, \end{cases}$$

其中 A 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l A dx = A,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l A \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l A \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l} = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ \frac{A}{2}, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l. \end{cases}$$

2940. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x$.

解 因为 $f(x) = x$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = x \quad (-\pi < x < \pi).$$

2941. 在区间 $(0, 2\pi)$ 中展开 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{\pi-x}{2n\pi} \sin nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin nx dx \\ &= -\frac{\pi-x}{2n\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

2942. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = |x|$.

解 因为 $f(x) = |x|$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} x \sin nx \Big|_0^{\pi} \\ &\quad - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1], \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = |x| \quad (-\pi < x < \pi).$$

2943. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{若 } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{若 } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

其中 a 及 b 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx dx = \frac{b-a}{2} \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \cos nx dx \\ &= \frac{a-b}{n^2 \pi} [1 - (-1)^n]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \sin nx dx \\ &= \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} &\frac{b-a}{4} \pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \\ &\quad + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\ &= \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

2944. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$.

解 因为 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^\pi + \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx \\
&= -\frac{4}{n^2\pi} x \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos nx dx \\
&= \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx = \pi^2 - x^2 \quad (-\pi < x < \pi).$$

2945. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \cos ax$.

解 因为 $f(x) = \cos ax$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax dx = \frac{2}{a\pi} \sin a\pi, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n+a)x + \cos(n-a)x] dx \\
&= \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} a}{n^2 - a^2},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right] = \cos ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

2946. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \sin ax$.

解 因为 $f(x) = \sin ax$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin ax \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n-a)x - \cos(n+a)x] dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n \sin nx}{n^2 - a^2} = \sin ax$$

$$(-x < x < \pi).$$

2947. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \operatorname{sh} ax$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \operatorname{sh} ax \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \operatorname{ch} ax dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi + \frac{a}{n^2} \operatorname{ch} ax \sin nx \Big|_0^{\pi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} b_n, \end{aligned}$$

即

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2 + a^2)\pi} \operatorname{sh} a\pi,$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 + a^2} = \operatorname{sh} ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

2948⁺. 在区间 $(-h, h)$ 中展开 $f(x) = e^{ax}$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} dx = \frac{1}{ah} (e^{ah} - e^{-ah}) = \frac{2}{ah} \operatorname{sh} ah,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \cos \frac{n\pi x}{h} dx \\
&= \frac{1}{h} \frac{a \cos \frac{n\pi x}{h} + \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h \\
&= \frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah; \\
b_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \sin \frac{n\pi x}{h} dx \\
&= \frac{1}{h} \frac{a \sin \frac{n\pi x}{h} - \frac{n\pi}{h} \cos \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h \\
&= \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah,
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{sh} ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \right] \\
&= e^{ax} (-h < x < h).
\end{aligned}$$

2949. 在区间 $(a, a+2l)$ 中展开 $f(x)=x$.

解 由于

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x dx = 2(a+l), \\
a_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{1}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} - \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
&= \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= \frac{-1}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} + \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l},
 \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $(a, a+2l)$ 中可展开为

$$\begin{aligned}
 a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right. \\
 \left. - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = x \quad (a < x < a+2l).
 \end{aligned}$$

2950. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x \sin x$.

解 因为 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) \\
 &= 2, \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x \cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad (n=2, 3, \dots), \\
 a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx = x \sin x \quad (-\pi < x < \pi).$$

2951. 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中展开 $f(x) = x \cos x$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x [\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x \cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 16}{\pi} \cdot \frac{n}{(4n^2 - 1)^2}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx = x \cos x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

将下列周期函数展开成福里叶级数:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

解 由于

$$f(x+2\pi) = \operatorname{sgn}[\cos(x+2\pi)] = \operatorname{sgn}(\cos x) = f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dx \right) \\
&= 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1 \end{cases} \\
&\quad (k=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \right] = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

注意, 此式在 $f(x)$ 的不连续点 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 也成立, 这是因为在这些点满足 $f(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$. 于是, 上述展式对一切 $-\infty < x < +\infty$ 皆成立.

2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内为一奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) \sin nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{n} \cos nx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \\
&= \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1 \end{cases} \\
&\hspace{15em} (k=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x = \arcsin(\sin x)$$

$(-\infty < x < +\infty).$

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x}{n} \sin nx - \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n]
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1 \quad (k=0,1,2,\cdots), \end{cases}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \arcsin(\cos x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2955. $f(x) = x - [x]$.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x+1) &= x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 \\ &= x - [x] = f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数. 而且, 除 $x=k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 诸点外, $f(x)$ 都连续. 由于

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} dx = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \cos 2n\pi x dx \\ &= 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x dx \\ &= 2 \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \sin 2n\pi x dx \\ &= 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx \\ &= 2 \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{n\pi},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} \quad (x \neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2956. $f(x) = (x)$, 其中 (x) 是它到与它最近的整数的距离.

解 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续周期函数, 由于

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x) dx = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx \right] = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 (x) \cos 2n\pi x dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cos 2n\pi x dx \right] \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}, & n = 2k+1 (k=0, 1, 2, \dots), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin 2n\pi x dx \right] \\ &= 2 \left\{ \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{1}{2n\pi} \cos 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right\} = 0, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x) \\ (-\infty < x < +\infty).$$

2957. $f(x) = |\sin x|$.

解 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi}, \\ a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x| \\ (-\infty < x < +\infty).$$

2958. $f(x) = |\cos x|$.

解 由于

$$f(x) = |\cos x| = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|,$$

故有

$$\begin{aligned}
|\cos x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{*})}{4n^2 - 1} \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1} \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \\
&\quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

*) 利用 2957 题的结果.

2959. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} (|\alpha| < 1).$

解 显然 $p_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 注意, 当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 函数值理解为其极限值

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{n \cos nx}{\cos x} = n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$ 是一个周期为 2π 的周期函数且为偶函数. 此外,

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \frac{\sin nx}{\sin x} \\
&= \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \\
&= p_{n-1}(x) \cos x + \cos(n-1)x,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
|p_n(x)| &\leq |p_{n-1}(x)| + 1 \quad (-\infty < x < +\infty) \\
&\quad (n=2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

注意到 $p_1(x) \equiv 1$, 由上式, 利用归纳法即知

$$|p_n(x)| \leq n \quad (-\infty < x < +\infty, n=1, 2, \dots).$$

于是,

$$\left| \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n |\alpha|^n \quad (-\infty < x < +\infty, n=1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha|^n$ 收敛 (因为 $|\alpha| < 1$), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \text{ 在 } -\infty < x < +\infty \text{ 上一致收敛. 由此}$$

可知, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 且在任何有限区间上均可逐项积分.

注意到 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数, 并且是偶函数, 故 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=2, 4, \dots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx + \sum_{n=1, 3, \dots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right] \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1} \alpha^{2k+1} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

其中

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq n} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m>n} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx.$$

当 $m \leq n$ 时, 不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数, 还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数, I_1 中诸积分都为零, 故有 $I_1 = 0$. 当 $m > n$ 时, 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数, 则 I_2 中对应的积分等于零; 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数, 则 I_2 中对应的积分等于 2π . 于是,

$$I_2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{(2k+1)+n} = 2 \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}.$$

由于 $a_n = I_2$, 故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos nx \right) \\ (-\infty < x < +\infty).$$

*) 利用 2291 题的结果

2960⁺. 把函数

$$f(x) = \sec x \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right)$$

展开为福里叶级数.

解 显然 $f(x) = \sec x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$ 内连续, 而且是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \\ a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx \\ = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 - \cos(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}), \\
a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\cos 4nx - \cos(4nx - 4x) \\
&= -2\sin(4nx - 2x)\sin 2x \\
&= -4\sin(4nx - 2x)\sin x \cos x \\
&= 2[\cos(4nx - x) - \cos(4nx - 3x)]\cos x,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \\
&= \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(4n-1)x - \cos(4n-3)x] dx \\
&\quad + \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x} dx \\
&= \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4n-1} \sin(n\pi - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4n-3} \right. \\
&\quad \left. \sin(n\pi - \frac{3}{4}\pi) \right] + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3} \sin \frac{3\pi}{4} \right] + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right) + a_{n-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)} + a_{n-1} (n=1, 2, \dots).$$

由此递推公式, 得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{16}{\pi} \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + a_0 \\ &= \frac{16}{\pi} \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} \\ &\quad + \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是, 下面的展式成立:

$$\begin{aligned} \sec x &= \frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{\pi} \sqrt{2} \right] \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)} \right] \cos 4nx \\ &\quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

2961. 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成福里叶级数: (a) 按余弦展开:

(6) 按正弦展开; (B) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开.

绘出函数的图形及情形 (a), (6) 与 (B) 的福里叶级数之和的图形.

利用这些展开式, 求级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (a) 由于 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= (-1)^n \frac{4}{n^2},
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

(6) 由于 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1],
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上按正弦展开为

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \\
= x^2 \quad (0 \leq x < \pi).
\end{aligned}$$

(B) 由于

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可展开为

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\ & = x^2 \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

函数的图形, (a)、(b) 及 (c) 的福里叶级数之和的图形, 如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

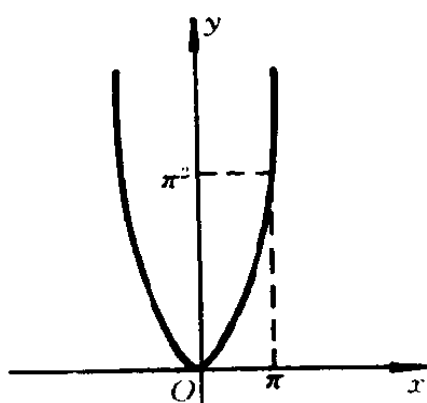


图 5.4

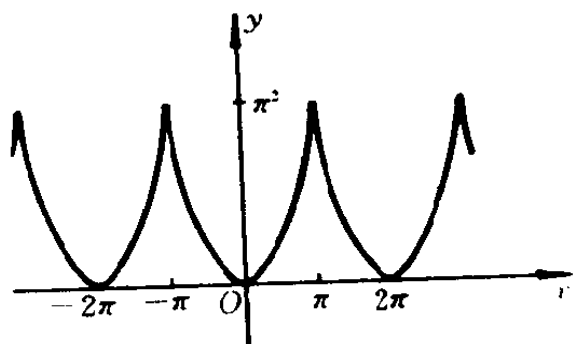


图 5.5

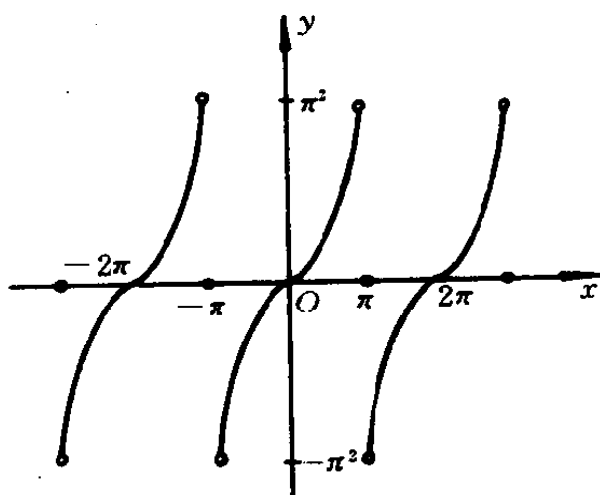


图 5.6

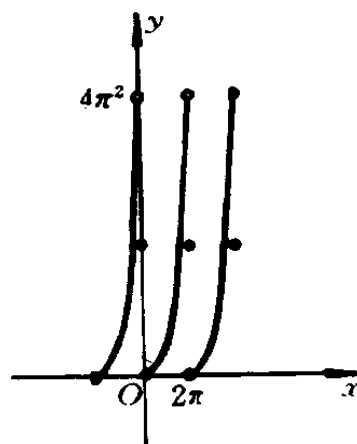


图 5.7

若在展开式(a) 中令 $x = \pi$, 则得

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n = \pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

若在展开式(B)中令 $x = \pi$, 则得

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2)$$

将级数(1)和(2)相加, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3)$$

2962. 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

用逐项积分的方法, 求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数.

解 将原式在 $[0, x]$ 上逐项积分, 得

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

代入上式, 即得

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (1)$$

将(1)式在 $[0, x]$ 上逐项积分, 并将

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

的结果代入, 即得

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \quad (-\pi < x < \pi). \quad (2)$$

将上式从 $-\pi$ 到 x 积分, 并以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (*)$$

代入, 得

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{4} - \frac{\pi^4}{4} &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} - 2\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ &\quad + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} + 12 \cdot \frac{\pi^4}{90}, \end{aligned}$$

即

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (3)$$

*) 由

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

及

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$$

$$= \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

将上式从 0 到 x 积分, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

以 $x = \pi$ 代入, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (1)$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (2)$$

收敛, 故可设其和为 S . 于是, 由 (2) - (1) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即

$$\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

从而

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

同时, 还可求出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 90}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} \\ &= \pi^4 \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{2^4 \cdot 90} \right) = \frac{7}{720} \pi^4. \end{aligned}$$

也可利用此结果求得 x^4 的展开式,事实上,将 x^3 的展开式从 0 到 x 积分,再以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得.

2963. 写出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < \alpha, \\ 0, & \text{当 } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式.

由李雅甫诺夫等式,求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数,从而 $b_n = 0$,且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos nx dx = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi},$$

又

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

故对应于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开的李雅甫诺夫等式为

$$\begin{aligned}\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2\alpha}{\pi}.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2},$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.\end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

2964. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x < 2, \\ 3-x, & \text{若 } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

展成福里叶级数.

解 将 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上按周期为 3 作福里叶展开, 注意其图象, 易见 $f(x)$ 的延拓 (周期为 3) 是偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_0^3 f(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x dx + \frac{2}{3} \int_1^2 1 dx + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) dx \\ &= \frac{4}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \\
& = \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \Big|_1^2 \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_2^3 \right\} \\
& = \frac{2}{3} \left\{ -\frac{9}{2(n\pi)^2} + \frac{9}{4(n\pi)^2} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + \cos \frac{4n\pi}{3} \right) \right\} \\
& = -\frac{3}{(n\pi)^2} + \frac{3}{(n\pi)^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 可按余弦展开为

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
& = f(x).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
& = \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi x}{3} \\
& \quad + \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{4\pi x}{3} \\
& \quad + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) \cos 2\pi x \\
& \quad + \left(-\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{8\pi x}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cos \frac{10\pi x}{3} \\
& + \left(-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}\right) \cos 4\pi x + \dots \\
& = -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2} \\
& \quad \cdot \frac{1}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x,
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x \\
& = f(x) \quad (0 \leq x \leq 3).
\end{aligned}$$

利用公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

式中 $t = e^{ix}$ 及 $\bar{t} = e^{-ix}$, 将下列函数展开成福里叶级数:

2965⁺. $\cos^{2m} x$ (m 为正整数).

解 $\cos^{2m} x$

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2m} \\
& = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{2m} C_{2m}^l e^{(2m-l)ix} e^{-lix} \\
& = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{l=0}^{m-1} + \sum_{l=m+1}^{2m} \right) C_{2m}^l e^{2(m-l)ix} \\
& = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left[\sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^l e^{2(m-l)ix} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l'=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-l'} e^{-2(m-l')ix} \right] \\
& = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s [e^{2(m-s)ix} + e^{-2(m-s)ix}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s \cos 2(m-s)x \\
&= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m}^{m-k} \cos 2kx.
\end{aligned}$$

由于上述表达式为一三角多项式, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 中的福里叶展开式即为它本身.

2966. $\frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2} (|q| < 1).$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2} &= \frac{\frac{q}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{q(e^{ix} - e^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - qe^{ix}} - \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \right) \\
&= \frac{1}{2i} [(1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \cdots) - (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \cdots)] \\
&= q \sin x + q^2 \sin 2x + \cdots,
\end{aligned}$$

及级数

$$q \sin x + q^2 \sin 2x + \cdots + q^n \sin nx + \cdots$$

满足 $|q^n \sin nx| \leq q^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n (|q| < 1)$ 收敛, 故级数

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 因此, 级数

$$q \sin x + q^2 \sin 2x + \cdots + q^n \sin nx + \cdots$$

即为其和 $\frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2}$ (它是周期为 2π 的奇函数)

的福里叶级数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$2967. \frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2} (|q|<1).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2} &= \frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} \\ &= (1-q^2) \frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} \\ &= -1 + \frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}} \\ &= -1 + (1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots) \\ &\quad + (1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx, \end{aligned}$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而它就是函数 $\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ 的福里叶级数 (在 $-\infty < x < +\infty$ 上).

$$2968. \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} (|q|<1).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} &= \frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots) + (1+qe^{-ix} \\ &\quad + q^2e^{-2ix}+\cdots)] \\ &= 1 + q\cos x + q^2\cos 2x + \cdots \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx,$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而它就是函数 $\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ 的福里叶级数 (在 $-\infty < x < +\infty$ 上).

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2) (|q|<1)$.

解 由于 $1-2q\cos x+q^2 \geq 1-2q+q^2 = (1-q)^2 > 0$, 故 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 而且是周期为 2π 的偶函数, 将函数对 x 求导数, 得

$$\begin{aligned} [\ln(1-2q\cos x+q^2)]' &= \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

对上式从 0 到 x 积分 (由于上式中级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故可在有限区间上逐项积分), 则有

$$\begin{aligned} &\ln(1-2q\cos x+q^2) \\ &= \int_0^x \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} dx + 2\ln(1-q) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x q^n \sin nx dx + 2\ln(1-q) \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + 2\ln(1-q). \end{aligned}$$

而

$$\ln(1-q) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n},$$

于是

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

由于右端级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故它就是左端函数的福里叶级数.

*) 利用 2966 题的结果.

将下列无界周期函数展开成福里叶级数:

2970. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 当 $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时函数有无穷不连续点. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) *) = -2 \ln 2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin nx \ln \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} dt \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \pi \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

故

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \\ &= \pi. \end{aligned}$$

在上式左端第二个积分中令 $\pi - x = u$, 即得与第一个积分相同的积分, 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

利用这一结果, 易得

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

由于 $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上绝对可积 (参看上面 a_0 计算):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx &= 2 \int_0^{\pi} \left| \ln \sin \frac{x}{2} \right| dx \\ &= -2 \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2\pi \ln 2 < +\infty, \end{aligned}$$

且除 $x = 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 诸点外, 在其他的点 $f(x)$ 均可微, 故根据福里叶级数收敛的 Lipschitz 判别法 (参看 T. M. 菲赫金哥尔茨著, 微积分学教程, 第三卷第三分册 658 目) 知, 除上述诸点外, $f(x)$ 的福里叶级数收敛于 $f(x)$ 本身, 即

$$\begin{aligned} \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| &= -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \\ &\quad (x \neq 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

*) 利用 2353 题的结果 .

* *) 利用 2291 题的结果 .

$$2971. f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

解 利用 2970 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \sin \frac{\pi - x}{2} \right| \\ &= -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\pi - x)}{n} \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx \\ &\quad (x \neq (2m+1)\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$2972. f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

解 利用 2970 题及 2971 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \\ &= \left[-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \right] - \left[-\ln 2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx \right] \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \\ &\quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

2973. 将函数

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

展开成福里叶级数 .

解 将函数对 x 求导数, 则得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x^*}{2k+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } f'(x) &= -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

在 $(-\pi, \pi)$ 内绝对可积, 故得

$$\int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

*) 利用 2972 题的结果.

2974. 函数

$$x=x(s), y=y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a)$$

是正方形: $0 < x < a, 0 < y < a$ 的围线的参数方程式, 其中 s 为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长. 试将这函数展开成傅里叶级数.

解 根据定义, $x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq a, \\ a, & a \leq s \leq 2a, \\ 3a-s, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 0, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $x(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的傅里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + b_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) ds \\
 &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s ds + \int_a^{2a} a ds + \int_{2a}^{3a} (3a-s) ds \right] \\
 &= a,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\
 &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\
 &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] + \left[\left(\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} - \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{3n\pi}{2} - \cos n\pi \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{2a}{(n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos \frac{3n\pi}{2} + \cos n\pi \right) \\
 &= \begin{cases} 0, \text{ 当 } n=2k; \\ \\ -\frac{4a}{\pi^2 (2k+1)^2}, \text{ 当 } n=2k+1; \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\
 &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\
 &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{6a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \right. \\
& + \left(\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \\
& \left. + \left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right\} \\
& = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\
& = \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

因此,按展开定理,注意到 $x(0)=x(4a)$, $x(s)$ 的福里叶展开式为

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&+ \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\quad (0 \leq s \leq 4a).
\end{aligned}$$

同样,根据定义, $y(s)$ 的表达式为

$$y(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq a, \\ s-a, & a \leq s \leq 2a, \\ a, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 4a-s, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $y(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + B_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) ds = \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) ds + \int_{2a}^{3a} a ds \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{3a}^{4a} (4a-s) ds \Big] = a, \\
A_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{-4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{2a}^{3a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} + \frac{8a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(-\frac{8a^2}{n\pi} - \frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \Bigg\} \\
& = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
& = \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots. \end{cases}
\end{aligned}$$

因此,按展开定理,注意到 $y(0)=y(4a)$,得 $y(s)$ 的福里叶级数展开为

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\quad + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\quad (0 \leq s \leq 4a).
\end{aligned}$$

2975. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi, \pi)$ 内,而使得它展开成福里叶级数的形状如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解 由于展开式中无正弦项,故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$,则按题设应有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nxdx &= 0 \\
(n &= 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi - x = y$,即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \cos 2nydy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nxdx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi - x) + g(x)] \cos 2nxdx = 0$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值, 恒有

$$f(\pi - x) + g(x) = 0,$$

即

$$g(x) = -f(\pi - x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $-f(\pi - x)$; 然后, 再按偶函数延拓到 $(-\pi, 0)$. 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x) = f(x), f(\pi - x) = -f(x) \quad (-\pi < x < \pi).$$

2976. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 而使得它展开成福里叶级数的形状如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解 由于展开式中无余弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = -f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nxdx = 0$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi - x = y$, 即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi - y) \sin 2ny dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nx dx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi - x) + g(x)] \sin 2nx dx = 0$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值, 恒有

$$-f(\pi - x) + g(x) = 0,$$

即

$$g(x) = f(\pi - x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $f(\pi - x)$; 然后, 再按奇函数延拓到 $(-\pi, \pi)$. 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x) = -f(x), f(\pi - x) = f(x).$$

2977. 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内把函数

$$f(x) = x(\frac{\pi}{2} - x)$$

展开: (a) 依角的奇倍数的余弦展开; (b) 依角的奇倍数的正弦展开.

绘出情形 (a) 与 (b) 的福里叶级数之和的图形.

解 (a) 利用 2975 题的结果, 延拓函数, 使有

$$f(-x) = f(x), f(\pi - x) = -f(x).$$

于是,有

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x)] \cos(2k+1)x dx \right\}.$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$, 则得到与第一个积分同样的结果, 即

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos(2k+1)x \right. \\ &\quad \left. - 2x \cos(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{8}{(2k+1)^2 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)x dx \\ &= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3 \pi} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8 \cdot (-1)^k}{(2k+1)^3 \pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$-2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \right\}$$

$$\cdot \cos(2k+1)x\} = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}),$$

其和的图形如图 5.8 所示.

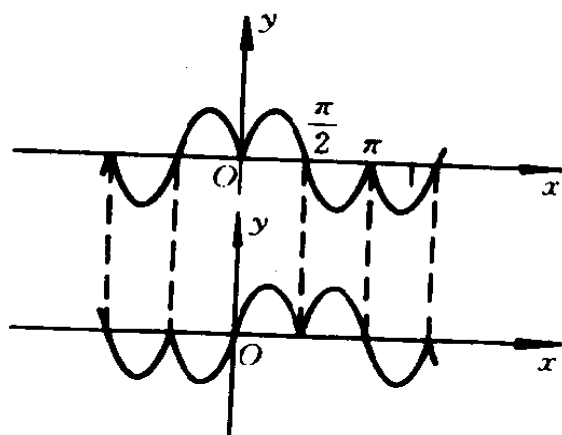


图 5.8

(6) 利用 2976 题的结果, 延拓函数, 使有 $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = f(x)$.

于是, 有

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi-x) \sin(2k+1)x dx \right].$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi - x = y$, 则得到与第一个积分同样的结果, 即

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x dx \\ &= -\frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \cos(2k+1)x dx \\
& = \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& \quad + \frac{8}{(2k+1)^2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx \\
& = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3\pi} \\
& \qquad \qquad \qquad (k=0,1,2,\dots).
\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{(2k+1)^3\pi} \right] \sin(2k+1)x \right\} \\
& = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

其和的图形如图 5.8 所示.

2978. 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, 即

$$f(x+\pi) = -f(x).$$

问此函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数是有怎样的特性?

解 由于

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 f(\pi+x) \cos nx dx \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \quad (n=0,1,2,\dots),
\end{aligned}$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$, 则得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(-1)^{n+1} + 1] f(x) \cos nx dx.$$

于是,得 $a_{2n}=0 (n=0,1,2,\cdots)$. 同理,可得 $b_{2n}=0 (n=1,2,\cdots)$. 因此,函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0 (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_{2n}=0 (n=1,2,\cdots).$$

2979. 设 $f(x+\pi)=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数具有怎样的特性?

解 与 2978 题类似,我们可求得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(-1)^n + 1] f(x) \cos nx dx$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

因此,有

$$a_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

同理,可求得

$$b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

2980. 一个具周期为 2π 的函数 $y=f(x)$, 如果函数的图形:

(a) 以点 $(0,0), \left(\pm\frac{\pi}{2},0\right)$ 为对称中心; (b) 以坐标原点

为对称中心及 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴; 问其福里叶系数 $a_n,$

$b_n (n=1,2,3,\cdots)$ 具有怎样的特性?

解 (a) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=-f(x).$$

因此, $a_n=0 (n=0,1,2,\cdots)$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx dx \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x)] \sin nx dx \Big\} \\
& = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx dx \right. \\
& \quad \left. + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin ny dy \right] \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^n] f(x) \sin nx dx,
\end{aligned}$$

从而 $b_{2n-1}=0$ ($n=0,1,2,\cdots$). 即 $f(x)$ 的福里叶级数的特性为

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n=1,2,\cdots), \\
b_{2n-1} &= 0 \quad (n=1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

(6) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x), f(\pi-x) = f(x).$$

同(a)一样, $a_n=0$ ($n=0,1,2,\cdots$), 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^{n+1}] f(x) \sin nx dx,$$

故 $b_{2n}=0$ ($n=1,2,3,\cdots$). 因此, $f(x)$ 的福里叶系数的特性为

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n=0,1,2,\cdots), \\
b_{2n} &= 0 \quad (n=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}$$

2981. 如果函数 $\varphi(-x)=\psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n=0,1,2,\cdots$) 之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx,
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx,$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将 $\varphi(-x) = \psi(x)$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = \alpha_n. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \sin nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx = -\beta_n. \end{aligned}$$

因此, $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n 的关系为

$$a_n = \alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = -\beta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2982. 如果函数

$$\varphi(-x) = -\psi(x),$$

问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n ($n=0, 1, 2, \dots$) 之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx;$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx.$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将

$$\varphi(-x) = -\psi(x)$$

代入, 即得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = -\alpha_n. \end{aligned}$$

同理, 有

$$b_n = \beta_n.$$

因此, $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n 的关系为

$$a_n = -\alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \beta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2983. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 a_n , b_n ($n=0, 1, 2, \dots$), 试计算“平移”了的函数 $f(x+h)$ (h =常数) 的福里叶系数 $\overline{a_n}, \overline{b_n}$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

解 在福里叶系数 $\overline{a_n}$ 的表达式中作代换 $x+h=y$, 并注意到 $f(x)$ 的周期性, 即有

$$\overline{a_n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y) [\cos nh \cos ny + \sin nh \sin ny] dy \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cos nh dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \sin nh dx \right] \\
&= a_n \cos nh + b_n \sin nh.
\end{aligned}$$

同理,可求得

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

2984. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 a_n , b_n ($n=0, 1, 2, \dots$), 试计算斯且克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的福里叶系数 A_n, B_n ($n=0, 1, 2, \dots$).

解 由于

$$\begin{aligned}
f_h(x+2\pi) &= \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = f_h(x),
\end{aligned}$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 2π 为周期的周期函数.

于是,有(作代换 $\xi = x+y$)

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_h(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-h}^h f(x+y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^h dy \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx.
\end{aligned}$$

根据 2983 题的结果可知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx = a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

故

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (a_n \cos ny + b_n \sin ny) dy \\ &= \frac{a_n}{h} \int_0^h \cos ny dy = \begin{cases} a_n, & \text{当 } n=0 \text{ 时;} \\ \frac{a_n \sin nh}{nh}, & \text{当 } n=1, 2, \dots \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$A_0 = a_0,$$

$$A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, \dots).$$

同理可得

$$B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, \dots).$$

2985. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数并且 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 为其福里叶系数. 求 卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$

利用所得的结果, 推出李雅甫诺夫等式.

解 由于

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = F(x), \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 仍是以 2π 为周期的函数. 于是, 有

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right]^2 = a_0^2, \\
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\cos n\xi \cos nt \\
&\quad + \sin n\xi \sin nt) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n f(t) \cos nt + b_n f(t) \sin nt] dt \\
&= a_n^2 + b_n^2; \\
B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\sin n\xi \cos nt \\
&\quad - \cos n\xi \sin nt) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [b_n f(t) \cos nt - a_n f(t) \sin nt] dt \\
&= b_n a_n - a_n b_n = 0.
\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的连续性知, $F(x)$ 不仅以 2π 为周期而且是连续函数, 故按展开定理, 注意到 $B_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 即得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

因此,特别地,有

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

但已知

$$A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2,$$

且

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(0+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

故得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这就是李雅甫诺夫等式.

§ 7. 级数求和法

1° 直接求和法 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n (n = 1, 2, \dots) \text{ 及 } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_{\infty},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_{\infty} - v_1.$$

特别是,若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

其中数 $a_i (i = 1, 2, \dots)$ 形成以 d 为公差的等差级数,则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 等等.}$$

2° 亚伯耳方法 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最简单的例子中, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和借助于逐项微分法或积分法来求.

3° 三角级数求和法 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和, 常把它们视为复数域内幂级数: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (其中 $z = e^{ix}$) 的实的实数部分及对应的虚数部分的系数.

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

是有用的.

求下列级数的和:

$$2986. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

解 由 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,
得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2987. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

解 由 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$, 并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1^*)$, 即得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2549 题的结果.

2988. $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} - 1 \right\} = 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \\
& = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
& = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) \\
& \quad - \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
& = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^{*)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2987 题的结果.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} (m \text{ 为自然数}).$

解 由 $\frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right)$, 考虑适当大的正整数 N , 并令 $N \rightarrow \infty$, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) \\
&= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right. \\
&\quad \left. - \cdots - \frac{1}{N+m} \right) = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right).
\end{aligned}$$

2991. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$

解 由 $\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right], \text{得} \\
&\quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right] \\
&= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) *) = \ln 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*) 注意原级数的绝对收敛性, 并利用 2988 题的结果.

2992. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

解 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$$2993. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

解 由 $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^{*)} = 1. \end{aligned}$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数, 并利用 2961 题的结果(或本节前言).

$$2994. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

解 由 $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{n_1=1}^{2N+1} \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} \sum_{n_2=1}^N \frac{1}{n_2} - 1 \right) \\ &= (C + \ln N + \varepsilon_1) - 2[(C + \ln(2N+1) \\ &\quad + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(C + \ln N + \varepsilon_3) - 1]^{*)} \\ &= 2 \ln \frac{N}{2N+1} + \alpha + 2, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0, \alpha = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rightarrow 0$
(当 $N \rightarrow \infty$).

于是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} = 2 \ln \frac{1}{2} + 2 = 2(1 - \ln 2),$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - \ln 2).$$

*) 利用 146 题的结果 .

$$2995. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n!} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2 + \sum_{n=3}^N \frac{n^2}{n!} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \right) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{N-2} \frac{1}{l!} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 + \sum_{s=1}^N \frac{1}{s!} \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} \\ &= 2e. \end{aligned}$$

$$2996. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

利用级数运算的性质可知, 对于绝对收敛的级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, 有下述等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

$$\text{其中 } d_n = \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n C_n^s = \frac{2^n}{n!},$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^2 = e^2,$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2.$$

2997. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$

解 由 $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)}$, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) - 2^{*}) = \frac{\pi^2}{3} - 3. \end{aligned}$$

*) 利用 2549 题及 2961 题的结果.

2998. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$

解 首先, 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)^2} - \frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2} \right] \\ &= \frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n(n+2)} = \frac{4}{n^2(n+2)^2} \quad (3)$$

将(1)、(2)、(3)三式相加,合并整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+2)} \\ & + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ & + \frac{2}{n^2(n+1)^2} \\ & = \frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}. \end{aligned}$$

其次,先后利用 2961 题、2990 题、2987 题和 2997 题的结果,即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right. \\ & + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \\ & + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 6 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 - \frac{1}{4} \right) \\ & \left. + 2 \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 \right) \right\} \\ & = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}. \end{aligned}$$

2999. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$

解 注意到

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right),$$

$$\frac{2}{5!} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right),$$

.....

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right),$$

.....

相加即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right)^{*}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \end{aligned}$$

*) 由于级数绝对收敛, 从而其和与项相加的顺序无关.

3000. $+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}.$

解 考虑部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n^2+n-2} \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{3} \sum_{l=4}^{N+2} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} \\
&= \frac{1}{18} (12 \ln 2 - 5).
\end{aligned}$$

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

的和.

解 令 $P(n) = a_0 + a_1n + \cdots + a_m n^m$

$$\equiv a_0 + a_1n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1),$$

其中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, m)$ 可由上述恒等式求出, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 + a_1n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!} x^n \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + a_1 x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\
&\quad + a_m x^m \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= a_0 e^x + a_1 x e^x + \cdots + a_m x^m e^x
\end{aligned}$$

$$=e^x(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_mx^m).$$

求下列级数的和:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$

解 对于任意 x , 考虑部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 1 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &\quad + \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \right] + \left[\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=2}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \right] + \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \\ &\quad + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right] \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\ &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

$$3003. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$$

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (-x)^n \\ &= \frac{1}{2}(-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} (e^{-x} - 1 + x) \\ &\quad + \frac{1}{x} \left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} \right) \\ &= e^{-x} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$3004. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

解 由 $\frac{2n^2+1}{(2n)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2)!} x^{2n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} - \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} \cos x - \frac{x}{2} \sin x + \cos x - 1 \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x.
\end{aligned}$$

3005. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}.$

解 1) 若 $x=0$, 则级数的和显然为零.

2) 若 $x>0$, 记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和, 并注意: 当任意固定 x 时, 某些常见幂级数的收敛性, 下述记号 $O(1)$ 是指当 $N \rightarrow \infty$ 时的无穷小. 于是有

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n)^2 - 1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{1}{4t} \text{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4t} \left[t^2 \sum_{n=1}^N \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} - t \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right] + \frac{1}{4t} \text{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4t} (t^2 \text{sh} t - t \text{ch} t + o(1)) + \frac{1}{4t} \text{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2 + 1}{t} \text{sh} t - \text{ch} t \right) + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \text{sh} \sqrt{x} - \text{ch} \sqrt{x} \right) + o(1).
\end{aligned}$$

因此, 当 $x>0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right).$$

3) 若 $x < 0$, 记 $y = \sqrt{|x|}$, 则 $x = -y^2$. 与上述讨论类似, 有

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 (-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [(2n)^2 - 1]}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\ &= \frac{1}{4y} \left\{ y^2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\ &= \frac{1}{4y} [-y^2 \sin y - y \cos y + o(1)] + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{-y^2 + 1}{y} \sin y - \cos y \right) + o(1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} - \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right) + o(1). \end{aligned}$$

因此, 当 $x < 0$ 时,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right). \end{aligned}$$

利用逐项微分法求级数的和:

$$3006. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时, 级数发散; 当 $x=-1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

当 $x \in [-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项微分之, 得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad (1)$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性, 且其和为 $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$, 利用亚伯耳定理知, 上述结果(1)当 $-1 \leq x < 1$ 时成立.

$$3007. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 级数绝对收敛. 因此, 级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

当 $x \in [-1, 1]$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项微分之, 得

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \operatorname{arctg} x^{**}).$$

由于 $f(0) = 0$, 故得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = 2 \int_0^x \operatorname{arctg} t dt \\ &= 2x \operatorname{arctg} x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2). \end{aligned} \quad (1)$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi^{***})}{4} - \ln 2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \ln 2, \end{aligned}$$

利用亚伯耳定理知, 上述结果(1) 包括端点在内也成立, 即当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, (1) 式成立.

*) 利用 2907 题的结果.

**) 利用 2938 题的结果.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+1} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x| = 1$ 时, 级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

逐项微分之,得

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

3009.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \quad (d > 0).$$

解 首先, 应设

$$a \neq -md \quad (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

因为否则, 若 $a = -md$ (m ——某正整数或零), 则原级数从 $m+1$ 项开始恒为零, 此时原级数为一多项式

$$\sum_{n=1}^m \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n,$$

它对任何 x 均收敛.

令

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)d}{a+nd} = 1,$$

故收敛半径为 1. 以下先设 $|x| < 1$ 求原级数的和, 最后再考虑端点 $x = \pm 1$ 时的情形.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n.$$

逐项微分之, 得,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot d \cdot 2d \cdots (n-1)d} x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端, 得 $(1-x)f'(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \\ &= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} f(x). \end{aligned}$$

上述方程系一阶线性方程:

$$f'(x) - \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x} f(x) = \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

解之, 得

$$f(x) = C(1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1 \quad (-1 < x < 1),$$

其中 C 为常数. 由于 $f(0) = 0$, 故得 $0 = C - 1$, 即 $C = 1$. 于是, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1. \quad (1)$$

最后, 考虑端点 $x = \pm 1$ 的情形, 先考虑 $x = 1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 由于当 n 充分大时, $a + nd > 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d-a)n}{a+nd} = \frac{d-a}{d}.$$

于是, 根据拉阿伯判别法可知, 当 $a < 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 当 $a > 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散; 但当 $a > 0$ 时, $a_n > 0$. 由此可知: 当 $a < 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $a > 0$

时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再考虑 $x = -1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. 当 $a < 0$ 时, 前面已证 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

下设 $a > 0$, 若 $a \geq d$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} \leq 1,$$

故

$$a_{n+1} \geq a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 的通项不趋于零, 因此它发散.

下设 $0 < a < d$. 于是有

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{a + (k-1)d}{kd} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $0 < a < d$, 故 $\ln(1 - \frac{d-a}{kd}) < 0 (k = 1, 2, 3, \dots)$.

注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) \bigg/ \left(- \frac{d-a}{kd} \right) = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right)$ 发散,

从而(它的每一项都是负的)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) = -\infty.$$

于是, 根据(2)式即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3)$$

另外, 因 $0 < a < d$, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1,$$

故

$$a_n > a_{n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

于是, 由(3)式及(4)式, 根据莱布尼兹判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ 收敛.}$$

综上所述, 并根据幂级数的亚伯耳定理, 即知: 当 $a < 0$ 时, 原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$, 且在其上, 公式(1)成立; 当 $0 < a < d$ 时, 原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x < 1$, 且在其上, 公式(1)成立; 当 $a \geq d$ 时, 原幂级数的收敛域为 $-1 < x < 1$, 且在其上, 公式(1)成立.

3010. $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots$

解 记 $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \cdot \frac{1}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3n+3)}{3n+1} = 2,$$

故收敛半径为 2. 先对 $|x| < 2$ 求级数的和, 然后再考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况.

当 $x \in (-2, 2)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \left(\frac{x}{2} \right)^n.$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdots (3n-3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

以 $\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ 乘上式两端, 得

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) f'(x) = \frac{1}{6} f(x) + \frac{1}{6}.$$

上述方程系一阶线性方程.

$$f'(x) - \frac{1}{6\left(1 - \frac{x}{2}\right)} f(x) = \frac{1}{6\left(1 - \frac{x}{2}\right)}.$$

解之, 得

$$f(x) = C \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \quad (-2 < x < 2).$$

由于 $f(0) = 0$, 故得 $0 = C - 1$, 即 $C = 1$. 于是, 当 $-2 < x < 2$ 时, 有

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1. \quad (1)$$

最后考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况, 先考虑 $x = 2$, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 其中

$$b_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

再考虑 $x = -2$, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

由于 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{3n+3}{3n+1} > 1$,

故

$$b_n > b_{n+1} > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

另外,

$$\ln b_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{3k-2}{3k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right).$$

由于 $\ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right) < 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right)}{-\frac{2}{3k}} = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right)$ 发散, 并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right) = -\infty.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (3)$$

由(2)式及(3)式, 根据莱布尼兹判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ 收敛.}$$

综上所述, 并利用幂级数的亚伯耳定理, 即知: 原幂级数的收敛域为 $-2 \leq x < 2$, 且在其上, 公式(1)成立.

利用逐项积分法求级数的和:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 由于 $n^2 \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

*) 利用 2911 题的结果.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 由于 $n(n+2) \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} \end{aligned}$$

$$=xg(x),$$

其中 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \int_0^x t^{n-1}dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \quad *) + \frac{2x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

故 $g(x) = [G(x)]' = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此,

当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = xg(x) = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

*) 利用 2911 题的结果.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} = +\infty$,

故级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}. \end{aligned}$$

于是, 当 $|x| < +\infty$ 时,

$$f(x) = (xe^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2).$$

注 本题也可直接求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) x^{2n} \\ &= 1 + 2x^2 e^{x^2} + (e^{x^2} - 1) \\ &= e^{x^2}(1+2x^2). \end{aligned}$$

对于本题, 还可利用逐项微分法求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(n-1)!} x^{2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2(n-1)+1] + 2}{(n-1)!} x^{2(n-1)+1} \\ &= 2x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{m!} x^{2m} + 4x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \\ &= 2xf(x) + 4xe^{x^2}, \end{aligned}$$

解一阶线性微分方程

$$f'(x) - 2xf(x) = 4xe^{x^2},$$

得

$$f(x) = e^{x^2}(2x^2 + C).$$

由于 $f(0) = 1$, 故得 $1 = 1(2 \cdot 0 + C)$, 即 $C = 1$, 于是, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$f(x) = e^{x^2}(2x^2 + 1).$$

利用亚伯耳方法, 求下列级数的和:

3014. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$.

解 级数

$$x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

的收敛域为 $(-1, 1]$. 当 $|x| < 1$ 时, 令

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots.$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1+x^3}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ &\quad + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

由亚伯耳定理, 即得

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \\ &= f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt[3]{3}}. \end{aligned}$$

*) 利用 1881 题的结果.

3015. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$

解 级数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

的收敛域为 $[-1, 1]$, 利用 2907 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x \\ = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

3016. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$.

解 级数

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \cdots$$

的收敛域为 $(-1, 1]$. 利用 2910 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots.$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3017. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots$.

解 级数

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$$

的收敛域为 $[-1, 1]$. 利用 2870 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots.$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots \\ = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和:

$$3018. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

解 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z},$$

其中 $z=e^{ix}$, 以及

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{1-z} &= -\ln(1-\cos x - i\sin x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2-2\cos x) + i \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1-\cos x} \quad *) \\ &= -\ln \left| 2\sin \frac{x}{2} \right| + i \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1-\cos x} \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (2)$$

比较(1), (2)两式实数部分及虚数部分, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2\sin \frac{x}{2} \right| \quad (0 < x < 2\pi) \quad (3)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} &= \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1-\cos x} \\ &= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi-x}{2} \right) \\ &= \frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

*) 其中用到 $\ln z = \ln(|z|e^{i\arg z}) = \ln|z| + i\arg z$.

若 $z=x+iy$, 则 $\ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 而 $\arg z =$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$3019. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

解 参看 3018 题中的结果(3).

$$3020. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}.$$

解 利用积化和差公式及 3019 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-\alpha)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x+\alpha)}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|, \end{aligned}$$

上式的存在域为 $0 < x - \alpha < 2\pi$ 及 $0 < x + \alpha < 2\pi$ 的公共部分, 可视 α 之正负号而定: 当 $\alpha > 0$ 时为 $\alpha < x < 2\pi - \alpha$; 当 $\alpha < 0$ 时为 $-\alpha < x < 2\pi + \alpha$.

$$3021. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

解 利用半角公式、积化和差公式以及 3018 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha \sin nx}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+2\alpha)}{n} \\ - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 S :

(1) 取 $0 < x < 2\pi, 0 < x-2\alpha < 2\pi$ 与 $0 < x+2\alpha < 2\pi$ 的公共部分, 即 $2\alpha < x < 2\pi-2\alpha$. 此时, 级数的和为

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} \\ = 0$$

(2) 当 $0 < x < 2\alpha$ 时,

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} + \frac{\pi-(2\alpha-x)}{8} \\ = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 当 $2\pi-2\alpha < x < 2\pi$ 时,

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)^{*})}{8} \\ - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} = -\frac{\pi}{4}.$$

*) 由于 $2\pi < x+2\alpha < 3\pi$, 故可令

$$x+2\alpha = 2\pi + \theta \quad (0 < \theta < \pi),$$

则有

$$\sin n(x+2\alpha) = \sin n(2\pi + \theta) = \sin n\theta,$$

从而以 $\theta = x+2\alpha-2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

解 记

$$I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

利用 3018 题的结果,有

$$\begin{aligned} I(x) &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|x|}{n} \\ &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} \quad (|x| < 2\pi). \end{aligned}$$

又记

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \\ I_2(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} I_2(x) &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(2|x|)}{k} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - 2|x|}{2} \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

由 $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, 当 $|x| < \pi$ 时,有

$$(\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} = I_1(x) + (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - 2|x|}{4}.$$

于是,最后得

$$\begin{aligned} I_1(x) &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \left(\frac{\pi - |x|}{2} - \frac{\pi - 2|x|}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

3023. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$

解 首先仿照 3018 题的解法,只要在公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

中令 $z = -e^{ix}$, 并注意幅角主值的取法, 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} \quad (|x| < \pi) \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right). \quad (2)$$

由于

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

故有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(m+1)x}{m} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(m-1)x}{m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} [\cos(m-1)x \\ & \quad - \cos(m+1)x] - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \sin mx \sin x \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sin x \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

3024. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

解 记

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致收敛, 故 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此, 只要求 $F(x)$ 在 $|x| \leq \pi$ 上的值. 易知

$$2\sin x \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = 1 - \cos 2nx.$$

故当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ ($0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ 是任意的) 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{\sin \tau}.$$

于是, 根据迪里黑里判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 上一致收敛. 从而, 由逐项求导数法则知: 当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 时, 有

$$F'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}^{**}). \quad (1)$$

由 τ 的任意性知 (1) 式当 $0 < x < \pi$ 时成立. 于是,

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + C \quad (0 < x < \pi) \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}^{***}),$$

在 (2) 式中令 $x \rightarrow +0$ 取极限, 即得 $C = \frac{\pi^2}{8}$, 于是

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{8} \quad (0 \leq x < \pi).$$

由此,再注意到 $F(x)$ 是偶函数及连续函数,得

$$F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x| \quad (|x| \leq \pi).$$

*) 利用 3022 题的结果 .

* *) 利用 2961 题的结果 .

$$3025. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

解 由于

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n+1} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(m-1)x}{m} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin mx}{m} \cos x \\ & \quad + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos mx}{m} \sin x \\ &= -(1+\cos x) \left(-\frac{x}{2} \right) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{*}) \\ &= \frac{x}{2} (1+\cos x) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \\ & \quad (|x| < \pi) \end{aligned}$$

*) 利用解 3023 题时的(1)、(2)两式 .

$$3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

解 令 $z=e^{ix}$, 考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}, \\ e^z &= e^{\cos x + i \sin x} \\ &= e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)], \end{aligned}$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < +\infty).$$

3027. 作曲线

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0$$

的图形

解 记

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x, y)$ 对 x, y 分别均为以 2π 为周期的周期函数, 故可考虑下列定义域:

$$R = \{0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\},$$

为研究 $f(x, y) = 0$ 的图形, 要用到下列函数:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} \quad (|t| < +\infty).$$

为求 $g(t)$, 考虑 $g'(t)$, 仿 3024 题的办法可知可逐项求导数, 再注意到 3022 题求解过程中的关系, 有

$$g'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

$$= -(\operatorname{sgn} t) \frac{\pi - |t|}{2} \quad (0 < |t| < 2\pi).$$

注意常数 $g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 于是得

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + \int_0^t g'(t) dt \\ &= g(0) - \frac{\pi}{2} |t| + \frac{1}{4} t^2. \end{aligned}$$

由于

$$\sin nx \cdot \sin ny = \frac{1}{2} [\cos n(x-y) - \cos n(x+y)],$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-y) - \cos n(x+y)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} [g(x-y) - g(x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[g(0) - \frac{\pi}{2} |x-y| + \frac{1}{4} (x-y)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[g(0) - \frac{\pi}{2} |x+y| + \frac{1}{4} (x+y)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} (|x+y| - |x-y|) \\ &\quad + \frac{1}{8} [(x-y)^2 - (x+y)^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 2\min\{x, y\} + \frac{1}{8} (-4xy) \\ &= \frac{1}{2} [\pi - \max\{x, y\}] \cdot \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

若 $x \leq y$, 则令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in R$, 有

$$x(\pi - y) = 0,$$

得 $x = 0$ 或 $y = \pi$. 若 $x \geq y$, 则令 $f(x, y) = 0$,

$(x, y) \in R$, 有

$$y(\pi - x) = 0,$$

得 $y=0$ 或 $x=\pi$. 因此, 在 R 内, $x=0, x=\pi; y=0, y=\pi$ 诸直线是满足 $f(x, y)=0$ 的图形.

又根据 $f(x, y)$ 的表达式知, 图形必然是按 x 及按 y 以 2π 为周期的周期曲线, 故得

$$x = l\pi, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y = m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

诸直线均为 $f(x, y)=0$ 的图形, 且除此而外, 均有 $f(x, y) \neq 0$, 即不是 $f(x, y)=0$ 的图象. 因此, $f(x, y)=0$ 的图形即为上述所指的两族直线组. 由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族, 它们的图形已为大家所熟知, 故省略.

求下列级数的和:

$$3028. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} (2x)^{2n+2} \bigg/ \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 x^2}{(2n+2)(2n+1)} = x^2, \end{aligned}$$

故原幂级数当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| > 1$ 时发散, 即其收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $|x| = 1$, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

由于

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{3n+1}{2n} \rightarrow \frac{3}{2} > 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故由拉阿伯判别法知, 当 $|x|=1$ 时原幂级数也收敛. 因此, 原幂级数当 $-1 \leq x \leq 1$ 时一致收敛. 从而其和函数 $f(x)$ 是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数, 且在 $-1 < x < 1$ 上可逐项微分, 得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2x)^{2n-1} \quad (-1 < x < 1),$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \quad (-1 < x < 1).$$

于是

$$\begin{aligned} & -xf(x) + (1-x^2)f''(x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2x)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \\ & \quad \cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2x)^{2n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n} = 4 \end{aligned} \quad (-1 < x < 1).$$

因此

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x) + \sqrt{1-x^2}f''(x)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

两端积分,得

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 4 \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1).$$

由 $f(0)=0$, 得 $C=0$, 从而

$$f'(x) = \frac{4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

两端再积分,得

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 + C_1 \quad (-1 < x < 1).$$

再由 $f(0)=0$, 得 $C_1=0$. 于是,有

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 \quad (-1 < x < 1).$$

再注意到上式两端都是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数, 通过取极限, 即知上式当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时也成立, 故最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} = 2(\arcsin x)^2 \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

3029. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \bigg/ \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故原幂级数的收敛半径等于 4, 即它当 $|x| < 4$ 时收敛, 当 $|x| > 4$ 时发散. 当 $x = \pm 4$ 时, 原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

由于

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

故 $|a_{n+1}| > |a_n|$ ($n=0, 1, \dots$), 因此 a_n 不趋于零, 从而级数(1)发散. 于是, 原幂级数仅当 $|x| < 4$ 时收敛, 下面分两种情形讨论:

当 $0 \leq x < 4$ 时, 令 $x = (2t)^2, 0 \leq t < 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2t)^{2n} \\ &= F(t) \quad (0 \leq t < 1). \end{aligned}$$

由直接计算, 易知

$$(1-t^2)F(t) - 1 = \frac{t}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2t)^{2n-1} \quad (0 \leq t < 1).$$

利用 3028 题的结果, 得

$$\begin{aligned} (1-t^2)F(t) - 1 &= \frac{t}{4} [2(\arcsin t)^2]' \\ &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \quad (0 \leq t < 1), \end{aligned}$$

从而

$$F(t) = \frac{1}{1-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \right) \quad (0 \leq t < 1).$$

将 $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (0 \leq x < 4).$$

现设 $-4 < x < 0$. 令

$$x = -(2t)^2, 0 < t < 1.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n (2t)^{2n} = G(t) \quad (0 < t < 1).$$

由直接计算可知

$$\begin{aligned} 1 - (1+t^2)G(t) &= t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n (2t)^{2n-1} \\ &= t \cdot g(t) \quad (0 < t < 1), \end{aligned}$$

其中

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n (2t)^{2n-1}.$$

(2)

易知(2)式右端幂级数的收敛半径等于 1. 于是, 当 $|t| < 1$ 时可逐项微分, 得

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2}.$$

由直接计算, 知

$$\begin{aligned} &(1+t^2)g'(t) + t \cdot g(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \frac{1}{2} n(2n-1)(2t)^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(n)!} \frac{n}{2} (2t)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\
& = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\
& = 1 \quad (-1 < t < 1),
\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{1+t^2} g'(t) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (-1 < t < 1).$$

两端积分,得

$$\sqrt{1+t^2} g(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C \quad (-1 < t < 1).$$

由 $g(0)=0$, 知 $C=0$, 故

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \quad (-1 < t < 1).$$

于是, 根据关系式

$$G(t) = \frac{1}{1+t^2} [1 - t \cdot g(t)] \quad (0 < t < 1),$$

再将 $t = \frac{\sqrt{-x}}{2} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \\
&\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}\right) \quad (-4 < x < 0).
\end{aligned}$$

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$

解 显然, 要使本题有意义, 首先要假定 x 不是负整数. 记

$$s_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ 的收敛性及其和, 注意当 $x \neq 1$ 时, 有关系式

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdot \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &\quad + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \frac{4}{x-1} \\ &= \dots \\ &= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \\ &\quad + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\ &\quad \cdot \frac{n+1}{x-1} = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} R_n &= s_n \cdot \frac{n+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{x+k} \\ &= \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k), \end{aligned}$$

这里(当 k 充分大时)

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{x}{k}} - 1 = (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{x}{k})^{-1} - 1 \\ &= \frac{1-x}{k} + O(\frac{1}{k^2}).\end{aligned}\quad (2)$$

由(1)式知,为研究 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 就是要研究 R_n 有无极限. 若 R_n 有极限为 τ , 则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{x-1} - R_n) = \frac{1}{x-1} - \tau.$$

令 $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k)$. 分两种情形讨论:

若 $x > 1$, 这时

$$0 < 1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 1 \quad (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned}\ln u_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k), \ln(1 + \alpha_k) < 0, \\ \alpha_k &< 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots), \alpha_k \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (3)$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散知:

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = -\infty$. 于是, 根据

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_k)}{\alpha_k} = 1$$

即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = -\infty$.

由此知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

故
$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \frac{1}{x-1}.$$

若 $x < 1$. 注意, 已设 x 不是负整数. 另外, 当 $x = 0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, 显然发散, 故可设 $-m < x < -m+1$, 其中 m 是某非负整数. 于是

$$1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} > 0 \quad (k = m, m+1, \dots).$$

令
$$v_n = \prod_{k=m}^n (1 + \alpha_k) \quad (n = m, m+1, \dots),$$
 则

$$\ln v_n = \sum_{k=m}^n \ln(1 + \alpha_k) \quad (n = m, m+1, \dots).$$

根据(2)式知, 当 k 充分大时 $\alpha_k > 0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ 发

散. 仿照前面的论述可知级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散, 且

$$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = +\infty. \text{ 从而当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \ln v_n \rightarrow +\infty,$$

$v_n \rightarrow +\infty$; 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \pm \infty,$$

其中的正、负号随 m 是 $2, 4, 6, \dots$ 之一或 $0, 1, 3, 5, \dots$ 之一而定. 由此可知, 此时 $\sum_{k=1}^{\infty} s_n$ 发散.

另外, 若 $x = 1$, 原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$, 显然发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $x > 1$ 时收敛, 且此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}.$$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ 在 $x > 0, a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$

同级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

解 记

$$s_n = \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

注意条件 $x > 0, a_n > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{x} &= \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2+x}{x} = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{x} \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{x} \\ &= \dots \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \\ &\quad \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \\ &\quad \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{x} = s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{a_{n+1}}{x} s_n = \frac{a_1}{x} \cdot \frac{a_2}{a_2+x} \cdot \frac{a_3}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_n+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x} \\
 &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{a_k+x} = \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{x}{a_k+x} \right) \\
 &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} (1 + a_k), \tag{2}
 \end{aligned}$$

这里

$$a_k = -\frac{x}{a_k+x} \quad (k=2, 3, \dots, n+1). \tag{3}$$

由(1)知,为研究原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$,就是要研究 R_n 有无极限.若 R_n 有极限 τ ,则由(1)得

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} s_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{x} - R_n \right) \\
 &= \frac{a_1}{x} - \tau. \tag{4}
 \end{aligned}$$

下面我们证明 R_n 有极限 $\tau = 0$. 显然

$$-1 < a_k < 0, 0 < 1 + a_k < 1 \quad (k=2, 3, \dots).$$

令 $u_n = \prod_{k=2}^{n+1} (1 + a_k)$, 则

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(1 + a_k).$$

易知正项级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k+x}$$

是发散的.事实上,由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 的发散性,可将 a_k 分为以下情况来讨论:1) 若 $a_k \geq x (k=2, 3, \dots)$, 则

$$a_k + x \leq 2a_k \text{ 即 } \frac{1}{a_k + x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散(无界)便知 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散. 2) 若除有限个 a_k 之外均有 $a_k \geq x$ (k 取除了某些有限个正整数以外的所有自然数), 则仍有上述结论. 3) 若存在一个叙列 a_{k_i} 使得 $a_{k_i} < x$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x \text{ 即 } \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x} (i = 1, 2, \dots).$$

显然, 有

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } N \rightarrow \infty),$$

于是, 级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

从而

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$$

注意到 $-1 < \alpha_k < 0$,

$$\ln(1 + \alpha_k) < a_k < 0 \quad (k = 2, 3, \dots),$$

可知

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = -\infty.$$

由此可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\ln u_n \rightarrow -\infty, u_n \rightarrow 0, R_n \rightarrow 0.$$

于是原级数收敛, 且

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \dots = \frac{a_1}{x}.$$

3032*). $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$, 若 (a) $|x| < 1$;

(6) $|x| > 1$.

解 记

$$s_n = \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} (n = 0, 1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

注意, 当 $|x| \neq 1$ 时, 有公式

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{x}{1-x^2} (1+x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} (1+x^2) \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^4} = \dots \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} \\ &= s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \frac{x^{2^{n+1}}}{1 - x^{2^{n+1}}}.$$

上述恒等式对任何 n 均成立. 为求 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 我们分两种情况予以处理:

(a) 当 $|x| < 1$ 时, 显然

$$R_n = \frac{|x|^{2^{n+1}}}{1 - |x|^{2^{n+1}}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) = \frac{x}{1-x}.$$

(6) 当 $|x| > 1$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} = 0$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1 - |x|^{2^{n+1}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} - 1} \right\} \\ &= -1. \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) \\ &= \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

*) 本题第三项前原题为减号, 应为加号.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 若 (a) $|x| < 1$; (b) $|x| > 1$.

解 记

$$s_n = \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \quad (n = 1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} &= \frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} \\ &\cdot \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} s_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1-x}{x} s_k &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}, \end{aligned}$$

或有

$$\sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x^{N+1}}.$$

于是,得

(a) 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^{N+1}} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

(6) 当 $|x| > 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{N+1}-1} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

§ 8. 利用级数求定积分之值

利用被积函数展开成级数的展开式来计算下列积分:

3034. $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx &= -\int_0^1 \ln(1-x) dx \\ &= -\int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx + \cdots *)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1. \quad **)$$

*) 由于幂级数(收敛半径为 1)

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

当 $x=1$ 时发散, 故在 $0 \leq x \leq 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明, 今证如下:

对任何 $0 < \tau < 1$, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} \ln(1-x) dx \\ &= \int_0^{\tau} \left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} \right) dx + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$R_n = \int_0^{\tau} \left(-\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \cdots \right) dx.$$

由于 $0 < \tau < 1$, 故可在 $0 \leq x \leq \tau$ 上逐项积分, 得

$$\begin{aligned} 0 > R_n &= - \left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right] \\ &> - \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right] \\ &= - \left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \cdots \right] \\ &= -\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 由(1)式知

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\tau} \ln(1-x) dx - \left(-\frac{\tau^2}{1 \cdot 2} - \frac{\tau^3}{2 \cdot 3} - \cdots - \frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)} \right) \right| \\ & < \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

在(2)式中让 n 固定而令 $\tau \rightarrow 1-0$ 取极限(注意, 瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x) dx$ 显然收敛), 得

$$\left| \int_0^1 \ln(1-x) dx - \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

由此式即知

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \ln(1-x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= -\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots, \end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) dx \\ &= \int_0^1 (-x) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{3} \right) dx \\ & \quad + \dots, \end{aligned}$$

换句话说, 逐项积分公式成立.

本节以下诸题中, 凡有在端点发散的级数的逐项积分合理性问题, 都可仿照上面类似地去证明, 不再一一写出.

* *) 利用 2549 题的结果.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx$

解
$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\}^{*})}{x} dx \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

*) 利用 2871 题的结果.

3036. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{x} dx \\ &= \int_0^1 (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots) dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \\ &= \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

3037. $\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx (p>0, q>0).$

解
$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx &= \int_0^1 x^{p-1} (-x^q - \frac{x^{2q}}{2} - \frac{x^{3q}}{3} - \dots) dx \\ &= - \int_0^1 (x^{p-1+q} + \frac{1}{2} x^{p+2q-1} + \frac{1}{3} x^{p+3q-1} + \dots) dx \\ &= - (\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{p+3q} \cdot \frac{1}{3} + \dots) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}. \end{aligned}$$

3038. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$

解
$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx &= - \int_0^1 \left(\ln x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \ln x \Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2} \Big|_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^{*)} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2549 题及 2961 题的结果.

3039. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$

解
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} x e^{-2\pi x} (1 + e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + \dots) dx \\
&= \left[-\frac{x}{2\pi} e^{-2\pi x} - \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-2\pi x} \right]_0^{+\infty} \\
&\quad + \left[-\frac{x}{4\pi} e^{-4\pi x} - \frac{1}{(4\pi)^2} e^{-4\pi x} \right]_0^{+\infty} \\
&\quad + \left[-\frac{x}{6\pi} e^{-6\pi x} - \frac{1}{(6\pi)^2} e^{-6\pi x} \right]_0^{+\infty} + \dots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}^{*}) = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

3040. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}$

解
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x} + e^{-2x} - \dots) dx \\
&= \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{2^2} e^{-2x} \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$+ \left(-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3^2}e^{-3x} \right)_0^{+\infty} - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad *).$$

*) 利用 2961 题的结果.

3041. 按模 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数幂展开 第一型完全椭圆积分

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

解 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi + \frac{5}{16}k^6\sin^6\varphi \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi + \dots \right) d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\} \quad *).$$

*) 利用 2281 题的结果.

3042. 按模 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数幂展开 第二型完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi.$$

解 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi \right\} d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\} \quad *).$$

*) 利用 2281 题的结果.

3043. 利用按椭圆离心率的正整数幂展开的级数以表椭圆

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的弧长.

解 设 $a > b$, 则 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $(\frac{b}{a})^2 = 1 - \epsilon^2$. 弧长为

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \epsilon^{2n} \cos^{2n} t \right\} dt \\ &= 4a \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{\epsilon^{2n}}{2n-1} \right\} \\ &= 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \epsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon^4}{3} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

证明下列等式:

3044. $\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^x} &= \int_0^1 e^{-x \ln x} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x \ln x + \frac{1}{2!} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{3!} x^3 \ln^3 x + \dots \right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2! \cdot 3} \ln^2 x - \frac{x^3}{3^2} \ln x + \frac{x^3}{3^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^4}{3! \cdot 4} \ln^3 x + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2} \ln^2 x - \frac{x^4}{4^3} \ln x + \frac{x^4}{4^4} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \end{aligned}$$

本题得证.

$$3045. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

解
$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t} [t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} \\ &\quad + \cdots + n!t + n!] \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}. \end{aligned}$$

本题得证.

$$3046^+. \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \frac{\pi}{n!} (n=0, 1, 2, \cdots).$$

解 若复数 $w = u + iv$, 记 $R\{w\} = u$ 为实部, 则有

$$R\{e^{ix}\} = e^{\cos x} \cos(\sin x).$$

因此, 原定积分为

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx \\ &= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ix} \cos nx dx \right\} \\ &= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ix} \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} R \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^m}{m!} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{m_1!} R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x} dx \right\} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x} dx \right\} \right]$$

注意, 对任意整数 k , 有积分关系:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } k=0; \\ 0, & \text{当 } k \neq 0. \end{cases}$$

从而, 当 $n \geq 0, m \geq 0$ 时, 有:

i) 当 $n=0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0. \end{cases}$$

此时相应地得

$$I_0 = \frac{1}{2} (2\pi + 2\pi) = 2\pi.$$

ii) 当 $n=1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=n, \\ 0, & \text{当 } m \neq n. \end{cases}$$

此时相应地得

$$I_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n!} 2\pi \right) = \frac{\pi}{n!}.$$

求:

3047. $\int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(ax \sin x - nx) dx \quad (n \text{ 是自然数}).$

解 被积函数正是 $e^{ae^{ix} - inx}$ 的实部, 故积分为

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(ax \sin x - nx) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} R\{e^{ae^{ix}-inx}\} dx \\
&= R\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}} e^{-inx} dx\right\} \\
&= R\left\{\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{ix})^m}{m!} e^{-inx} dx\right\} \\
&= R\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx\right\} \\
&= R\left\{\frac{a^n}{n!} \cdot 2\pi + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx\right\} \\
&= \frac{2\pi a^n}{n!}.
\end{aligned}$$

3048⁺. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} dx.$

解 利用 2864 题的结果, 即得

$$\frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} x \sin nx \quad (|a| < 1).$$

由于

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n},$$

所以, 当 $|a| < 1$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1-2a \cos x + a^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a^{n-1} \frac{\pi}{n} \\
&= \frac{\pi}{a} \ln(1+a).
\end{aligned}$$

当 $|a| > 1$ 时, $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$,

$$\frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x \sin x}{1-2\left(\frac{1}{a}\right) \cos x + \left(\frac{1}{a}\right)^2}.$$

利用以上结果, 即得: 当 $|a| > 1$ 时,

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} dx = \frac{\pi}{a} \ln(1 + \frac{1}{a}).$$

3049. $\int_0^{\pi} \ln(1-2a \cos x + a^2) dx.$

解 利用 2872 题的结果, 即得: 当 $|\alpha| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \ln(1-2a \cos x + a^2) dx \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{a^n \cos nx}{n} dx = 0. \end{aligned}$$

当 $|\alpha| > 1$, 即当 $\left| \frac{1}{\alpha} \right| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \ln(1-2a \cos x + a^2) \\ &= \ln[a^2(1-2\frac{1}{a} \cos x + \frac{1}{a^2})] \\ &= \ln a^2 + \ln(1-\frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}). \end{aligned}$$

利用以上结果, 即得当 $|\alpha| > 1$ 时

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2a \cos x + a^2) dx = \pi \ln a^2 = 2\pi \ln |\alpha|.$$

3050. 证明公式:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 且 $0 < \theta_n < 1$.

若于公式(1)中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx,$$

其精确程度如何?

解 当 $x \geq 0$ 时, 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x+a}$ 在 $x=0$ 点的 n

阶台劳展式,有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x+a} \\
 &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\
 &\quad + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}} x^n \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1+\theta \cdot \frac{x}{a})^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \bar{\theta}_n(x) \frac{x^n}{a^{n+1}},
 \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 而对于函数

$$\bar{\theta}_n(x) = \frac{1}{(1+\theta \frac{x}{a})^{n+1}},$$

也有 $0 < \bar{\theta}_n(x) < 1$ ($0 < x < +\infty$).

由 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

以及 $0 < \int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx < \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$,

即知

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx = \theta_n n!,$$

其中 $0 < \theta_n < 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a^k} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} \theta_n(x) x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \theta_n. \end{aligned}$$

公式证毕.

在上述公式中, 令 $a=100=10^2$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx &= 10^{-2} - 1! 10^{-4} + 2! 10^{-6} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} (n-1)! 10^{-2n} + (-1)^n \theta_n n! 10^{-2n-2} \\ &\quad (0 < \theta_n < 1). \end{aligned}$$

如果取前两项来表示积分, 即在上式中取 $n=2$, 则误差为 $(-1)^2 \theta_2 2! 10^{-6}$, 其绝对值小于 $2 \cdot 10^{-6}$, 于是,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx - 0.01 + 0.0001 \right| &\leq 0.000002 \\ &= 2 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

§ 9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性. 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P,$$

则称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

是收敛的.

若 $P = 0$ 而乘数 p_n 中无一个等于零, 则称乘积(1) 发散于零; 在相反的情形下, 则称无穷乘积 收敛于零.

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

若 $p_n = 1 + \alpha_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 及 α_n 不变号, 则乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

收敛.

在一般的情形下, 当 α_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛, 则乘积(1)将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

同时收敛或同时发散, 在发散的情形下, 乘积发散于零.

2° 绝对收敛性 乘积(1)称为绝对或条件(非绝对)收敛是随级数(2)为绝对或条件收敛而定. 级数(3)绝对收敛就是乘积(1)绝对收敛的充分而且必要的条件.

3° 函数的成无穷乘积展开 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

特别是, 由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式:

$$3051. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

证 记 $p_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}, \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$3052. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

证 记 $p_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \rightarrow \frac{2}{3} \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}, \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$3053. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

证 记 $p_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}$, 由于部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^n p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \rightarrow \frac{1}{3} (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2.$

证 由于部分乘积满足下述等式:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right)P_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

从而

$$P_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2.$$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdots (\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}) \\
 &= \cdots \\
 &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$3056. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

证 当 $x \neq 0$ 时, 由于部分乘积

$$\begin{aligned}
 P_n &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \\
 &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{\sin x}{x}
 \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$3057. \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

证 由于部分乘积

$$P_n = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} (x \neq 0)$$

及

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{sh} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 1,$$

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$3058. \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} (|x| < 1).$$

证 由于

$$(1-x)P_n = (1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}},$$

从而(注意 $|x| < 1$)

$$P_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \rightarrow \frac{1}{1-x} \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

利用此题的结果, 易得

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

此即 3054 题的结果.

$$3059. \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

证 在 3056 题中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 利用半角公式, 有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

.....

则得

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots,$$

也即

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots$$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

证 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

令 $x = \frac{\pi}{3}$, 有

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n)^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}. \end{aligned}$$

于是得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

$$3061. \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}.$$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdots \frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)} \\ &\quad \cdot \frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n} \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{4(n-1)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}$ 收敛, 且其值为 $\frac{1}{4}$.

$$3062. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right].$$

证 $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \\ &\quad \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]$ 收敛, 且其值为 2.

$$3063. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9} \cdot \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 11} \cdots \frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &\quad \cdot \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2n+7}{2n+3} \rightarrow \frac{3}{7} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$ 收敛, 且其值为 $\frac{3}{7}$.

3064. $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} (a > 0).$

证 由于部分乘积

$$P_n = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n})}$$

$$\rightarrow a^{-\ln 2} (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛, 且其值为 $a^{-\ln 2}$.

3065. 可否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性得出乘积:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n);$ (b) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2;$

(B) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n;$ (r) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$

的收敛性?

解 (a) 不可以. 例如, 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$ 及 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$ 均收敛, 但乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right] = \prod_{n=1}^{\infty} (2 \cdot n^0)$$

却发散.

(6) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = P_1^2 \cdot P_2^2 \cdots P_n^2 = (p_1 p_2 \cdots p_n)^2$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 P^2 , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛, 且其值

为 P^2 , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$.

(B) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 PQ , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛, 且其

值为 PQ , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

(Γ) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \quad (q_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 收敛, 且其值

为 $\frac{P}{Q}$, 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性:

$$3066. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

解 由于通项 $p_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 不满足收敛的必要条件 ($p_n \rightarrow 1$); 或者说: 由于部分乘积

$$p_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时),}$$

且每项不为零, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散于零.

$$3067. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

解 通项 $p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$, 而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛, 且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号, 故无穷乘积

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛. 事实上, 已由 3062 题知, 该无穷乘积是收敛的, 且其值为 2.

$$3068. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right).$$

解 $p_n = 1 + \frac{1}{n^p}$, 其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 p

> 1 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散.

$$3069. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

解 由于 $p_n - 1 = -\frac{1}{n}$ 不变号, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散, 故

原乘积发散. 或由于部分乘积

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零, 且乘积中无一项为零, 故原乘积发散于零.

$$3070^*). \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$$

解 通项 $p_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2 + 1} \right)^p = p \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2 + 1} \right)$$

对任何 p 均收敛(因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 1}$ 收敛),故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^p$, 这时, 若 $p \geq 0$, 第一个因子为零, 按定义无穷乘积收敛于零; 若 $p < 0$, 第一个因子无意义, 因此整个无穷乘积无意义.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + a n + b}$, 其中当 $n \geq n_0$ 时 $n^2 + a n + b > 0$.

解 通项 $p_n = \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + a n + b}$

$$= 1 + \frac{(a_1 - a)n + (b_1 - b)}{n^2 + a n + b},$$

令

$$a_n = \frac{(a_1 - a)n + (b_1 - b)}{n^2 + a n + b}.$$

当 $a_1 = a$ 时, $a_n \sim \frac{1}{n^2}$. 由于 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原乘积收敛.

当 $a_1 \neq a$ 时, 由于 $n^2 + a n + b > 0$, 且 $a_n \sim \frac{a_1 - a}{n}$, 故

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散, 从而原乘积也发散.

3072. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n - a_1)(n - a_2) \cdots (n - a_p)}{(n - b_1)(n - b_2) \cdots (n - b_p)}$, 其中 $n_0 > b_i (i = 1, 2, \dots, p)$.

解 $p_n = \frac{(n - a_1)(n - a_2) \cdots (n - a_p)}{(n - b_1)(n - b_2) \cdots (n - b_p)} = 1 +$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right) n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i\right)}{\prod_{i=1}^p (n - b_i)}.$$

令

$$a_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right) n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i\right)}{\prod_{i=1}^p (n - b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 时, $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而原乘积收敛. 当 $\sum_{i=1}^p a_i \neq \sum_{i=1}^p b_i$ 时, 由于当 $n > n_0$ 时, $\prod_{i=1}^p (n - b_i) > 0$, 且 $a_n \sim \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right)$, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散, 从而原乘积也发散.

3073. $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$

解 $p_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \ln p_n = \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$ 发散 (于 $-\infty$), 故原乘积也发散 (于零).

3074. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$

解 $p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$

$$\ln p_n = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛, 从而

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$

解 $p_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, \ln p_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) > 0$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n^2},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原乘积也收敛.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[2]{n}.$

解 $p_n = \sqrt[2]{n}, \ln p_n = \frac{1}{n^2} \ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln n.$$

由于 $\frac{1}{n^2} \ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, 此处 ε 为满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的任一

常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛, 故原乘积收敛.

$$3077. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

解 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n} \right) \left[1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

故若记

$$p_n = 1 + \alpha_n,$$

则当 n 充分大时, 有

$$\alpha_n = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right) < 0,$$

保持不变号. 注意到对任何 x , 级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right]$$

收敛, 这里 n_0 为适当大的某一正整数. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛.

因此, 原无穷乘积收敛.

$$3078. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n} \right) e^{\frac{x}{n}}, \text{ 其中 } c > 0.$$

解 对任意 x , 考虑通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{c+n} \right) e^{\frac{x}{n}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{c+n} \right) \left[1 + \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{x}{c+n} + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= 1 - \frac{x^2 - cx}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 故原无穷乘积收敛.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$

解 当 $|x| \geq 1$ 时, 由于通项 $p_n = 1 - x^n \nrightarrow 1$, 即不满足收敛的必要条件, 故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 1$ 时, 若 $x = 0$ 显然收敛; 若 $x \neq 0$ 则有

$$\ln p_n = \ln(1 - x^n) = -x^n \ln \left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}} \right].$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right] = 1,$$

从而

$$\ln p_n = O(|x|^n).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛, 故此时原无穷乘积收敛.

3080. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$

解 当 $|x| \geq 2$ 时, 通项 $p_n = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n \nrightarrow 1$, 故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 2$ 时, 若 $x = 0$ 显然收敛; 若 $x \neq 0$, 利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}} = \lim_{y_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e,$$

就有

$$\begin{aligned} \ln p_n &= \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) \\ &= \frac{x^n}{2^n} \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}} = O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{2} \right|^n$ 当 $|x| < 2$ 时收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

$$3081. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right].$$

解 1) 当 $|x| < e$ 时, 利用

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + o(1) \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

存在适当的整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > |x|,$$

于是相应地, 得

$$\left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n > 1.$$

这表明, 此时

$$p_n = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \not\rightarrow 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件, 故原无穷乘积发散.

2) 当 $|x| = e$ 时, 利用 70 题的结果, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \frac{3}{n}.$$

此时, 得

$$\begin{aligned} p_n &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \\ &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n \end{aligned}$$

$$= 1 + \alpha_n.$$

但

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n \right| \\ &= \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n > \left[\frac{e - \frac{3}{n}}{e} \right]^n \\ &= \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^n, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{ne} \right)^{\frac{ne}{3}} \right]^{\frac{3}{e}} \\ &= e^{-\frac{3}{e}} > 0, \end{aligned}$$

故此时有 $\alpha_n \rightarrow 0$, 也即 $p_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而原无穷乘积发散.

3) 当 $|x| > e$ 时, 记 $p_n = 1 + \alpha_n$, 为考察 α_n 的变化, 仍利用

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e + o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

存在适当大正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{2}(e + |x|).$$

记

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x| + e}{|x|},$$

则 $0 < q < 1$, 有

$$|\alpha_n| = \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{|x|} \right]^n$$

$$< \left[\frac{\frac{1}{2}(e+|x|)}{|x|} \right]^n = q^n.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛. 由

$$\ln p_n = \ln(1 + \alpha_n),$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 绝对收敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$

解 对于任意 x , 考虑通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left[1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &= \left[1 - \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &\quad + \left[-\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right). \end{aligned}$$

因此, 若记 $p_n = 1 + \alpha_n$, 则有 $\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$. 于是, 由级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 的绝对收敛, 可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$$

绝对收敛,从而知原无穷乘积收敛.

$$3083. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p} \right) \cos \frac{x^n}{n^q}.$$

解 1) 当 $|x| < 1$ 时, 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p} \right) \cos \frac{x^n}{n^q} \\ &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p} \right) \left[1 + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}} \right) \right] \\ &= 1 + \frac{x^n}{n^p} + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}} \right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} \right) \\ &= 1 + O\left(\frac{x^n}{n^p} \right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} \right). \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 不论 p, q 为何值, 均有

$$\frac{x^n}{n^p} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}} \right), \quad \frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}} \right).$$

于是可写

$$p_n = 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n = O\left(|x|^{\frac{n}{2}} \right).$$

因此有

$$|\ln p_n| = |\ln(1 + \alpha_n)| = O(|\alpha_n|) = O\left(|x|^{\frac{n}{2}} \right).$$

由于当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{|x|})^n < +\infty,$$

从而 $\sum \ln p_n$ 绝对收敛, 故原乘积 $\prod p_n$ 收敛.

2) 当 $x=1$ 时, 在 $p>1, q>\frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{1}{n^p} \right) \cos \frac{1}{n^q} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^p} \right) \left[1 - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),
\end{aligned}$$

若记

$$p_n = 1 + \alpha_n, \alpha_n = \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则 $\sum \alpha_n$ 绝对收敛, 且由

$$\begin{aligned}
\alpha_n^2 &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) \\
&= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right),
\end{aligned}$$

易知 $\sum \alpha_n^2$ 也收敛, 故此时乘积 $\prod p_n$ 收敛.

3) 当 $x = -1$ 时, 在 $p > \frac{1}{2}, q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned}
p_n &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \cos \frac{(-1)^n}{n^q} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \\
&\quad \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\
&= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\
&= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),
\end{aligned}$$

可记

$$p_n = 1 + \beta_n, \beta_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则有

$$\ln p_n = \ln(1 + \beta_n) = \beta_n + O(\beta_n^2),$$

易见 $\sum \beta_n$ 收敛, 而

$$\beta_n^2 = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$

$$= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

故 $\sum \beta_n^2$ 绝对收敛, 从而知 $\sum \ln p_n$ 收敛. 于是, 此时乘积 $\prod p_n$ 收敛.

$$3084. \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^p.$$

解 显然应当要求 $x \neq 0$. 记通项为 $p_n = (1 + \alpha_n)^p$, 其中

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 = \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1 \\ &= -\frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

而

$$\ln p_n = p \ln(1 + \alpha_n) = p \ln \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 收敛^{*}), 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原无穷乘积收敛.

^{*}) 参看 2677 题的结果.

$$3085. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

解 记

$$p_n = \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n},$$

由要求 $\ln(n+x) - \ln n \geq 0$, 知 $x \geq 0$. 1) 当 $x=0$ 时, 显然各项均为零, 无穷乘积收敛于零. 2) 当 $x > 0$ 时, 由

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

可知, 当 $n \geq \frac{x}{e-1}$ 时, 有 $\ln(1 + \frac{x}{n}) \leq 1$, 故此时

$$\ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq 0. \text{ 再由}$$

$$\frac{-\frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)} \rightarrow +\infty$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ 发散, 从而得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

3086. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

证 当 $x \rightarrow 0$ 时, $p_n = \cos x_n = 1 + \alpha_n$, 其中 $\alpha_n = -\frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2)$, $\alpha_n \leq 0$, 且由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) \right]$$

收敛, 故乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

3087. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right)$

$\left(|\alpha_n| < \frac{\pi}{4} \right)$ 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. 此时有

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right) &= \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha_n}{1 - \operatorname{tg} \alpha_n} \\ &= (1 + \operatorname{tg} \alpha_n)(1 + \operatorname{tg} \alpha_n + \operatorname{tg}^2 \alpha_n + \cdots) \end{aligned}$$

$$= 1 + 2\operatorname{tg} \alpha_n + 2\operatorname{tg}^2 \alpha_n + \cdots$$

$$= 1 + 2\alpha_n + o(\alpha_n).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [2\alpha_n + o(\alpha_n)]$ 收敛, 而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2\alpha_n + o(\alpha_n)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4\alpha_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot o(\alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} o^2(\alpha_n)$$

也收敛*, 故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right) \left(|\alpha_n| < \frac{\pi}{4} \right)$$

收敛.

*) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \cdot |\alpha_j|,$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时, 有

$$|\alpha_n \cdot o(\alpha_n)| \leq |\alpha_n|, |o^2(\alpha_n)| \leq |\alpha_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot o(\alpha_n)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} o^2(\alpha_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

$$3088. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right).$$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛, 且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]^2 \text{ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.}$$

$$3089. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right).$$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right).$

解 当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 绝对收敛, 故原无穷乘积绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 条件收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

当 $p \leq 0$ 时, 由于 $\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 不趋于零, 故原无穷乘积也发散.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right).$

解 由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 条件收敛及 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散*), 故原无穷乘积发散.

*) 当 n 充分大时, 显然有 $n > \ln^2 n$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散即知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散.

$$3092. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

解 记

$$p_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

则有

$$\ln p_n = \ln \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right].$$

令

$$u_k = \ln p_{2k} + \ln p_{2k+1} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

即得

$$\begin{aligned} u_k &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} \right) \\ &= \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] > 0. \end{aligned}$$

由于

$\lim_{k \rightarrow \infty}$

$\ln$

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{-\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} u_k &= -\frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \cdot \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{-\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}} \\ &\sim -\left[\frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] \sim \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

$(k \rightarrow \infty)$.

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 从而 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

解 记 $p_n = n^{(-1)^n}$, 则有子序列

$$p_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

于是 $p_n \nrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$. 从而原无穷乘积发散.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 记 $p_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$, 则有

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln n^{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼兹型级数, 它条件收敛, 因而原无穷乘积条件收敛.

3095. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right)$.

解 记

$$p_n = 1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

则有

$$|\ln p_n| = \frac{1}{n} \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right)^{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} \right| \sim \frac{1}{n} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

因此, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln p_n|$ 发散. 若令 $u_n = \ln p_n$, 则有

$$u_{2k-1} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right],$$

$$u_{2k} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^k}{2k} \right] (k=1, 2, 3, \dots).$$

记 $a_k = u_{2k-1} + u_{2k}$, 可得

$$\begin{aligned} a_k &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)} \right] \\ &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)} \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

故

$$a_{2m-1} = 0,$$

$$a_{2m} = \ln \left[1 - \frac{2}{4m(4m-1)} \right] (m=1, 2, 3, \dots).$$

于是, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 注意到 $u_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 可得

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 因此, 原无穷乘积条件收敛.

$$\begin{aligned} 3096. & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ & \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \dots \end{aligned}$$

解 研究无穷级数

$$\begin{aligned} & \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ & + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}} \right) \\ & + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots \end{aligned}$$

的收敛性问题. 今将级数(1)每三项依次加括号, 考虑如此形成的新级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \right) \right]. \quad (2)$$

以下将指出(2)发散,从而(1)也发散,因此原无穷乘积发散. 现将(2)的通项记成

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \right) \quad (3)$$

则有

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \right) \right] \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} \right] \\ &= \ln \left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[1 - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} \right] \right\} \\ &= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}} - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}} \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} \right] \\
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(1 - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 + \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
&\quad \left. + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
&\quad \left. + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}} - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1} (\sqrt{16n^2-1} + 4n)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln[1 + a_n],
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n = -\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, 故 $\alpha_n \rightarrow 0$ 且当 n 充分大时 $\alpha_n < 0$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

发散; 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 发散. 于是, 原无穷乘积发散.

$$3097. \left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right) \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2 \\ \cdot \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \cdots$$

解 记

$$q_1 = 1 + \frac{1}{1^a}, q_2 = \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)^2, q_3 = 1 + \frac{1}{3^a}, \\ q_4 = 1 + \frac{1}{4^a}, q_5 = \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2, q_6 = 1 + \frac{1}{6^a}, \cdots$$

若记 $q_n = 1 + \alpha_n$, 则

$$\alpha_1 = \frac{1}{1^a}, \alpha_2 = -\frac{2}{2^a} + \frac{1}{2^{2a}}, \alpha_3 = \frac{1}{3^a}, \alpha_4 = \frac{1}{4^a}, \\ \alpha_5 = -\frac{2}{5^a} + \frac{1}{5^{2a}}, \alpha_6 = \frac{1}{6^a}, \cdots$$

1) 当 $a > 1$ 时, 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \frac{1}{1^a} + \left(\frac{2}{2^a} - \frac{1}{2^{2a}}\right) + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} \\ + \left(\frac{2}{5^a} - \frac{1}{5^{2a}}\right) + \frac{1}{6^a} + \cdots \quad (1)$$

是收敛的, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 绝对收敛.

2) 注意当 $a \leq 0$ 时, 不可能有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 发散.

3) 今讨论 $0 < a \leq 1$ 时的情形. 将原无穷乘积写为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right) \left(1 - \frac{1}{5^a}\right) \\ & \cdot \left(1 - \frac{1}{5^a}\right) \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \left(1 + \frac{1}{7^a}\right) \left(1 - \frac{1}{8^a}\right) \left(1 - \frac{1}{8^a}\right) \\ & \cdot \left(1 + \frac{1}{9^a}\right) \cdots, \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \frac{1}{1^a}, p_2 = 1 - \frac{1}{2^a}, p_3 = 1 - \frac{1}{2^a}, \\ p_4 &= 1 + \frac{1}{3^a}, p_5 = 1 + \frac{1}{4^a}, p_6 = 1 - \frac{1}{5^a}, p_7 = 1 - \frac{1}{5^a}, \\ p_8 &= 1 + \frac{1}{6^a}, p_9 = 1 + \frac{1}{7^a}, \cdots, \end{aligned}$$

又记

$$p_n = 1 + \alpha_n^* \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

为研究乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的收敛性, 考虑通项的表达式, 有

$$\alpha_n^* = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^a}, & \text{当 } n=4k+1, \\ -\frac{1}{(2+3k)^a}, & \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^a}, & \text{当 } n=4k+4 \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

为考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^*$ 的收敛性, 可看级数

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+3k)^a} - 2 \cdot \frac{1}{(2+3k)^a} + \frac{1}{(3+3k)^a} \right] \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \end{aligned}$$

的收敛性,为此,估算通项 α_k ,有

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{2}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \\ &= \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{1}{(2+3k)^\alpha} \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{(2+3k)^\alpha} - \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{(3k+1+\theta_1)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{(3k+2+\theta_2)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{\alpha+2}} \cdot (1+\theta_2-\theta_1),\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta < 1$. 显然,令 $\delta = 1 + \theta_2 - \theta_1$, 则有 $0 < \delta < 2$, 且 $\theta(1 + \theta_2 - \theta_1) = \theta\delta \in (0, 2)$. 因而

$$0 < \alpha_k = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{\alpha+2}} \cdot \delta \leq \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(3k+1)^{\alpha+2}}.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{\alpha+2}}$ 的收敛性知 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^*$ 收敛. 但 α_n^* 变号,还需看级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$. 易见

$$\alpha_n^{*2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+1, \\ \frac{1}{(2+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+4 (k=0,1,2,\dots). \end{cases}$$

无论哪种情形,均有

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2\alpha}} < \alpha_n^{*2} < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2\alpha}} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

因而当 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时,由上述左侧不等式,从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}$$

的发散性, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$ 发散, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 此时发散.

因此 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也发散. 当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时, 由上述不等式右侧部分, 从

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2\alpha}} < +\infty$$

便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$ 此时收敛. 从而相应地 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 也收敛. 因此,

$\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也收敛. 但由(1)式知(当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$

发散, 故当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 条件收敛.

3098. 证明: 纵使级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \quad (1)$$

发散, 而乘积

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \quad (2)$$

收敛.

证 设原级数(1)的通项为 u_n , 则

$$u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1},$$

$$u_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

令

$$a_k = u_{2k-1} + u_{2k} = \frac{1}{k+1}.$$

显然, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 故原级数(1) 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积(2) 所对应的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n),$$

则其通项 $v_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且

$$v_{2k-1} = \ln(1 + u_{2k-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k} = \ln(1 + u_{2k}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \quad (k=1, 2, \dots),$$

从而

$$\begin{aligned} b_k &= v_{2k-1} + v_{2k} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right). \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 从而可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 故原无穷乘积(2) 必收敛.

3099. 证明: 纵使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 二者发散, 而乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛, 其中

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k. \end{cases}$$

证 考虑 $\alpha_k = \alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}$, 则有

$$\alpha_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 便知正项级数

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散.

再记 $b_k = \alpha_{2k-1}^2 + \alpha_{2k}^2$, 则有

$$\begin{aligned} b_k &= \left(\frac{1}{k} \right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} \right)^2 \\ &= \frac{2}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} \\ &= \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right). \end{aligned}$$

由级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛, 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ 发散, 便知正项级数

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 所对应的级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 其中通项

$$v_n = \ln(1 + \alpha_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

考虑

$$\begin{aligned}
c_k &= v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + \alpha_{2k-1}) + \ln(1 + \alpha_{2k}) \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \\
&= \ln\left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 注意到 $v_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 从而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 因此, 原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛.

3100. 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数) 而 $p_n (n = 1, 2, \dots)$ 是素数的叙列.

证明 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$

证 设 $x > 1$. 首先, 有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^2)^x} + \dots + \frac{1}{(p_n^m)^x} + \dots.$$

如果把对应于不超过自然数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来, 则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \dots,$$

其中 $n_1, n_2, \dots$ 是整数, 它不包含超过 N 的素因子, 显然 $1, 2, \dots, N$ 这种整数全被包含在 $n_1, n_2, \dots$ 之中. 因此

$$\left| \zeta(x) - \prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} \right|$$

$$= \left| \zeta(x) - 1 - \frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x} - \dots \right|$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+2)^x} + \dots \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

取极限即得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x} \right)^{-1} = \zeta(x) (x > 1).$$

3101. 证明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

[其中 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 是素数的叙列] 发散 (尤拉).

证 与 3100 题的处理方法类似, 考虑部分乘积, 易见也有

$$\prod_{p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

由于当 $N \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1}$ 发散, 且具有值 $+\infty$.

由上述可知, $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)$ 发散于零. 又由于 $\frac{1}{p_n} > 0$, 它始终不变号, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

发散.

3102. 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right) (\epsilon > 0),$$

证明: $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

证 考虑无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, 其中

$$p_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

首先可证 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 是收敛的. 事实上, 考察其对应级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, 通项为

$$\begin{aligned} \ln p_n &= \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} + p \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} + p \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= -\ln(1 + \Delta_n) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\Delta_n + O(\Delta_n^2) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

这里

$$\Delta_n = \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right) (\epsilon > 0),$$

故有

$$\ln p_n = -\frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛,

记其值为

$$k_0 = \prod_{n=1}^{\infty} p_n,$$

则 $k_0 \neq 0$, 且 k_0 为一有限正数, 再研究部分乘积

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^N p_n.$$

一方面, $P_N \rightarrow a_1 k_0 > 0$ (当 $N \rightarrow \infty$ 时); 另一方面, 由于

$$\begin{aligned} P_N &= a_1 \prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \\ &= a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p, \end{aligned}$$

注意 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故当 N 充分大时, 有

$$\begin{aligned} \ln \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= p \sum_{n \leq N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= p \sum_{n \leq N} \left(\frac{1}{n} + \beta_n\right) \\ &= p \left[\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^N \beta_n \right] \\ &= p \left[\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] \\ &= p \left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right], \end{aligned}$$

其中 C 为 Euler 常数, $C > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$ 是一常数, 而

$\sum_{n=1}^N \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right)$, $C_0 = C + B$ 是一常数. 于是

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= e^{p[\ln N + C_0 + O(\frac{1}{N})]} \\ &= N^p \cdot G_N, \end{aligned}$$

其中

$$G_N = e^{c_0 p + o(\frac{1}{N})} \longrightarrow e^{c_0 p} > 0 (N \rightarrow +\infty).$$

这样一来,就有

$$\begin{aligned} 0 < a_1 k_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} [a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [a_{N+1} N^p G_N] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} G_N \\ &= e^{c_0 p} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p). \end{aligned}$$

上述式子中的各个极限运算是允许的,因为 P_N 及 G_N 的极限存在,且 G_N 的极限不为零,故 $a_{N+1} N^p = \frac{P_N}{G_N}$ 的极限存在. 因此,就有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) = \frac{a_1 k_0}{e^{c_0 p}} \text{ (非零常数)}.$$

这表明 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量,或者说, a_N 与 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 为同级无穷小量,但 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 同级,故最后得: a_N 与 $\frac{1}{N^p}$ 是同级无穷小量,也即当 N 充分大时,有

$$a_N = O^* \left(\frac{1}{N^p} \right).$$

3103. 利用瓦里斯公式证明

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

证 瓦里斯公式为

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{或 } \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sim \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方, 即得

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. 证明: 表示式

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有异于零的极限 A .

由此推出斯特林格公式

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ 和 $A = \sqrt{2\pi}$,

证 按题设我们可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

下证不等式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}, \quad (1)$$

证明了这一点, 即可知 $a_{n+1} < a_n$, 从而 $\{a_n\}$ 为递减数列.

事实上, 在等式

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right)$$

中令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots\right],$$

也即

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\dots$$

上式右端显然大于 1, 但小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此, 我们有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此, 取指数(底为 e), 即得(1)式:

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

由上述不等式, 即可推知:

$$0<a_{n+1}<a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{及 } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

由此可见, 数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列, 因此

它有有限极限 A ; 而数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 单调递增且有上界:

$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_n < a_1$, 故也有极限. 由于 $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$,

故这两个数列有同一极限 A . 由于对任何的 n , 不等式

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < a_0$$

成立, 故在 0 与 1 之间存在这样的 θ , 使得

$$A = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} \text{ 或 } a_n = A e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

因此,

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^n = A e^{\frac{\theta}{12n}},$$

$$\text{即 } n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (\theta = \theta(n), 0 < \theta < 1),$$

或

$$n! = A n^{n+\frac{\theta}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

现在我们来确定常数 A . 将瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$$

稍加变形, 并将 $n!$ 的表达式代入, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} A^2 n^{2n+1} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{6n}}}{A \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{24n}}} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} A^2 \cdot \frac{n}{2} e^{\frac{\theta}{4n}} = \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

由此得 $A^2 = 2\pi$ 或 $A = \sqrt{2\pi} (A > 0)$.

于是, 最后证得斯特林格公式为

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

用上式可估计很大的 n 时阶乘 $n!$ 的值.

3105. 根据尤拉的定义戛玛函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

由这个公式出发: (a) 表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状;

(6) 证明 $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义; (B) 推出下面这个性质

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

(r) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (a) 由于

$$\begin{aligned}
\frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x \left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},
\end{aligned}$$

故得

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(6)由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程,得知 $x \neq -n$ ($n=0,1,2,\cdots$),即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式. 另一方面,由于

$$p_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + a_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

而 $a_n = \frac{x(x-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,从而无穷乘积

$$\frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛,也即 $\Gamma(x)$ 对于 $x \neq -n$ ($n=0,1,2,\cdots$) 的一切实数 x 皆有意义.

(B)由于

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)}}{\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n+1} = x,
\end{aligned}$$

故 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(r) 令 $x = n-1$, 即得

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= \cdots = (n-1)! .
\end{aligned}$$

3106. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可以积分及

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, f_{in} = f(a + i\delta_n) (i=1, 2, \cdots, n),$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$

证 令 $y_n = \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in})$, 则

$$\begin{aligned}
\ln y_n &= \sum_{i=1}^n \ln(1 + \delta_n f_{in}) \\
&= \sum_{i=1}^n [f_{in} \delta_n + O(\delta_n^2)] \\
&= \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= \int_a^b f(x) dx,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$$

证毕.

3107 *). 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{2}{e},$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$.

证 记 $t = \frac{b}{a}$, 则 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + it)}}{\frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + it)} \\ &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + it)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + it)}. \end{aligned}$$

注意, 当 n 充分大时, 可算得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + it) &= n + t \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= n + \frac{t}{2} (n-1)n = \frac{t}{2} n^2 + O(n). \end{aligned}$$

记 $Q_n = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + it)}$, 考虑

$$\begin{aligned}\ln Q_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 + it) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\frac{1 + it}{1 + nt} (1 + nt) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 + nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{1 + it}{1 + nt} \\ &= \ln(1 + nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1 - \Delta_i),\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_i = 1 - \frac{1 + it}{1 + nt} = \frac{(n - i)t}{1 + nt} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n -$$

1),

故得

$$\begin{aligned}\ln Q_n &= \ln(nt) + \ln \left(1 + \frac{1}{nt} \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left(1 - \frac{t}{1 + nt} j \right) \\ &= \ln(nt) + O \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{tj}{1 + nt} \right)^k \\ &= \ln(nt) + O \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1 + nt} \right)^k \sum_{j=1}^n j^k \\ &= \ln(nt) + O \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1 + nt} \right)^k \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{k+1} n^{k+1} + O(n^k) \right] \\ &= \ln(nt) + O \left(\frac{1}{n} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{nt}{1 + nt} \right)^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\right) \\
& = \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
& = \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k \\
& \quad + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
& = \ln(nt) + \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) + \left(\frac{1+nt}{nt}\right) \\
& \quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{k+1} + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
& = \ln(nt) + \ln \frac{1}{1+nt} + \frac{1+nt}{nt} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^s \right. \\
& \quad \left. - \frac{nt}{1+nt} \right] + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
& = \ln(nt) - \ln(1+nt) - \frac{1+nt}{nt} \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) - 1 \\
& \quad + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
& = \ln(nt) - \ln(1+nt) - \ln \frac{1}{1+nt} - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
& = \ln(nt) - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right).
\end{aligned}$$

于是

$$Q_n = \frac{nt}{e} \cdot e^{O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)},$$

因而有

$$S_n = \frac{Q_n}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{\frac{nt}{e} \cdot e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{\frac{t}{2}n + O(1)}$$

$$= \frac{2}{e} \cdot \frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

最后得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{e}.$$

证毕.

*) 原题有误. 应改为由叙列 $\{a+ib\}$ 的几何平均与算术平均之比的极限, 分母应为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib),$$

而不是 $\sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)$.

3108. 设 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内为连续函数且

$|f_n(x)| \leq c_n$ ($n=1, 2, \dots$), 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

证明: 函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

在区间 (a, b) 上是连续的.

证 1) 首先证明上述乘积对任何 $x \in (a, b)$ 是收敛的. 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 故 $c_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因而 $f_n(x) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故存在正整数 N_0 , 当 $n \geq N_0$

时,有 $|f_n(x)| < \delta$,此处 δ 可事先取 $(0,1)$ 内的任一实数. 现在只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 的收敛性即可,或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)] = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)], \quad (1)$$

其中

$$g_k(x) = f_{N_0+k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

如能证明

$$G(x) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)] \quad (2)$$

是收敛的,以及下面再证 $G(x)$ 是连续的,那么

$$F(x) = G(x) \prod_{n=1}^{N_0} [1 + f_n(x)] \quad (3)$$

当然是收敛的而且是连续的. 今研究(2)式,其中 $|g_n(x)| < \delta$,因而 $1 + g_n(x) > 0 (n = 1, 2, \dots)$. 现在考察乘积对应的另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$:显然,由 $|g_n(x)|$

$\leq C_{N_0+n}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{N_0+n}$ 收敛,便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 绝对收敛.

因而原乘积(2)(绝对)收敛.

2) 再证 $G(x)$ 的连续性. 注意当 $x \in (a,b)$ 时 $G(x) > 0$,故可考虑它的对数函数 $L(x) = \ln G(x)$. 若能证得 $L(x)$ 为 (a,b) 上的连续函数,则就可得知 $G(x)$ 也在 (a,b) 上连续. 由于

$$\begin{aligned} L(x) &= \ln G(x) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} [1 + g_n(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln [1 + g_n(x)] \end{aligned}$$

以及 $|g_n(x)| \leq C_{N_0+n}, C_{N_0+n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 再注意到 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, 即知: 当 n 充分大时 ($n > N^*$), 对一切 $x \in (a, b)$ 皆有

$$|\ln[1 + g_n(x)]| \leq 2|g_n(x)| \leq 2C_{n+N_0}.$$

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n+N_0}$ 的收敛性知, $L(x)$ 为一在区间 (a, b) 上一致收敛的连续函数项级数之和. 因而 $L(x)$ 在 (a, b) 上为一连续函数. 从而 $G(x)$ 在 (a, b) 上连续. 因此, 最后得知 $F(x)$ 在 (a, b) 内是一连续函数. 证毕.

3109. 求函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

的导函数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

解 首先假定 $1 + f_n(x) \neq 0$ ($a < x < b, n = 1, 2, \dots$).

如果在区间 (a, b) 内的任意一点 x 上, 均有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛, 也即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty (x \in (a, b)), \quad (1)$$

那么, 显然无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 在 (a, b) 内(绝对)

收敛且 $F(x) \neq 0$. 考虑函数

$$G(x) = \ln |F(x)|. \quad (2)$$

为研究取 $F(x)$ 的导函数的计算式,先对(2)作形式求导,有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \text{ 或 } F'(x) = F(x)G'(x). \quad (3)$$

今再研究 $G'(x)$,即研究形式导数

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln \left| \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \right| \right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + f_n(x)| \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |1 + f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}. \end{aligned} \quad (4)$$

为使(4)式的一切运算有意义,我们可给出如下充分条件: $f_n(x)$ 可导,且

$$|f'_n(x)| \leq c_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \quad (x \in (a, b)). \quad (5)$$

下面我们证明:在条件(1)、(5)之下, $F(x)$ 在 (a, b) 内可导,且

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}. \quad (6)$$

只要证明(6)式对 (a, b) 中任一点 x_0 成立. 设 $x_0 \in (a, b)$ 已取定. 取 a_1, b_1 使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$. 首先证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad (7)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ 的收敛性, 为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \quad (8)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 但根据(5)式, 有: 当 $x \in (a_1, b_1)$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &= |f'_n(\xi_n)(x - x_0)| \\ &\leq (b_1 - a_1)c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $x_0 \leq \xi_n \leq x$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性, 根据外氏判别法知级数(8), 从而级数(7), 在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 于是, 必有正整数 N 存在, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 恒同时满足下面两个不等式:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$|\ln[1 + f_n(x)]| \leq 2|f_n(x)|, \quad (11)$$

由(10)式与(5)式又知: 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 有

$$\left| \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)} \right| \leq 2c_n. \quad (12)$$

根据(11)式与(12)式, 注意到级数(7)在 (a_1, b_1) 的一致收敛性知, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1 + f_n(x)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}$ 都在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 从而知(4)式中的逐项求导数是允许的, 即 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且(4)式成立. 由(2)式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}. \quad (13)$$

由(9)式得:当 $a_1 < x < b_1$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq (b_1 - a_1)c_n + |f_n(x_0)| \\ &= d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛,故根据 3108 题的结果知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上连续. 但前面已述 $F(x) \neq 0$, 故在 (a_1, b_1) 上或是 $F(x)$ 恒大于零,这时(13)式为

$$F(x) = e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1); \quad (14)$$

或是 $F(x)$ 恒小于零,这时(13)式为

$$F(x) = -e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1). \quad (15)$$

在(14)式成立的情形,由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导,且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下,由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导,且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = -e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}.$$

在 (a_1, b_1) 上(6)式必成立. 特别在点 x_0 成立.

总之,在条件(1)和条件(5)之下,再假定 $1 + f_n(x) \neq 0$ ($a < x < b, n = 1, 2, 3, \dots$) 即可推出在 (a, b) 上 $F'(x)$ 存在且公式(6)成立.

3110. 证明:若 $0 < x < y$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = 0.$$

证 记

$$p_n = \frac{x+n}{y+n} (n=1, 2, 3, \dots).$$

显然, $0 < p_n < 1$. 由题意, 现在要证无穷乘积

$$\frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

发散到零. 因为部分乘积 $\prod_{k=1}^n p_k$ 是正的递减的, 故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下 $p_n = 1 + \alpha_n$, 则有

$$\begin{aligned} \alpha_n = p_n - 1 &= \frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{y}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-1} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= \left[1 - \frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= -\frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故当 n 适当大时, α_n 保持定号. 但由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}$

$\frac{y-x}{n}$ 发散, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散,

即它发散到零. 于是, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{y+k} \\ &= \frac{x}{y} \prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0. \end{aligned}$$

证毕.

§ 10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林格公式, 近似地计算:

3111. $\lg 100!$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lg 100! &= \lg \{ \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta}{12 \cdot 100}} \} \\ &= \frac{1}{2} (\lg 2 + \lg \pi + \lg 100) + 100 \lg 100 - 100 \lg e + \frac{\theta}{1200} \lg e \\ &= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.4971 + 2) + 200 - 100 \cdot 0.4343 \\ &\quad + 0.0004\theta \\ &= 157.9691 + 0.0004\theta, \\ \text{其中 } 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

3112⁺. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999 &= \frac{2000!}{2^{1000} \cdot 1000!} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2000} \cdot 2000^{2000} \cdot e^{-2000} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000} \cdot e^{-1000} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}} \\ &= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot e^{\frac{\theta}{12000}} \\ &= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot \left(1 + \frac{\theta}{12000} \right), \\ \text{其中 } |\theta| < 1 \quad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1). \end{aligned}$$

3113. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} = \frac{100!}{2^{100} (50!)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}} \\
 &= 0.0798 e^{\frac{\theta}{300}} \doteq 0.0798 \left(1 + \frac{\theta}{300} \right), \\
 &\text{其中 } |\theta| < 1 (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1).
 \end{aligned}$$

3114. C_{100}^{40} .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & C_{100}^{40} = \frac{100!}{40! \cdot 60!} \\
 &= \frac{\sqrt{200\pi} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi \cdot 40} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 60} \cdot 60^{60} \cdot 40^{40} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{480} + \frac{\theta_3}{720}}} \\
 &= 10^{28} \cdot 1.378 e^{\frac{\theta}{288}} \\
 &\doteq 10^{28} \cdot 1.378 \left(1 + \frac{\theta}{288} \right), \\
 &\text{其中 } |\theta| < 1 (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1).
 \end{aligned}$$

3115. $\frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3 \pi^3 20 \cdot 30 \cdot 50} \cdot 20^{20} \cdot 30^{30} \cdot 50^{50} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{240} + \frac{\theta_3}{360} + \frac{\theta_4}{600}}} \\
 &= 10^{42} \cdot 4.792 e^{\frac{\theta}{120}} \\
 &\doteq 10^{42} \cdot 4.792 \left(1 + \frac{\theta}{120} \right), \\
 &\text{其中 } |\theta| < 1 (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1).
 \end{aligned}$$

3116. $\int_2^1 (1-x^2)^{50} dx$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int_0^1 (1-x^2)^{50} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{101} t dt \\
&= \frac{(100)!!}{(101)!!} = \frac{2^{100} \cdot (50!)^2}{101!} \\
&= \frac{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{300}}}{101 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{1200}}} \\
&= \frac{10}{101} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 \left(1 + \frac{\theta}{300} \right), \\
\text{其中 } |\theta| < 1 \quad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1).
\end{aligned}$$

3117. $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx.$

解 先将 $\int_0^{2\pi}$ 分成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$, 及 $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ 四部分, 然后分别作代换 $x=t$, $x=t+\frac{\pi}{2}$, $x=t+\pi$, 及 $x=t+\frac{3\pi}{2}$, 再利用结果

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

易得

$$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{200} x dx.$$

利用 2281 题的结果及斯特林格公式, 最后得

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx &= 4 \frac{(199)!!}{(200)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{200!}{2^{200} (100!)^2} \cdot 2\pi \\
&= \frac{2\pi \sqrt{2\pi \cdot 200} \cdot 200^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200} \cdot 200\pi \cdot 100^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_2}{600}}} \\
&= 0.355 \cdot e^{\frac{\theta}{600}} = 0.355 \left(1 + \frac{\theta}{600} \right),
\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1 (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1)$.

3118. 对于乘积

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

推出渐近公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } (2n-1)!! &= \frac{2n!}{2^n n!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12n}}} \\ &= \sqrt{2} (2n)^n e^{-n + \frac{\theta}{12n}}, \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1 (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1)$.

3119. 若 n 甚大, 近似地计算 C_2^n .

$$\begin{aligned} \text{解 } C_2^n &= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{6n}}} \\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{\theta}{6n}}, \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1 (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1)$.

3120. 利用斯特林格公式求下列极限:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}};$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}; \quad (r) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{2\pi n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^3}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = e. \end{aligned}$$

(B) 利用 3118 题的结果即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2} \cdot 2n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} \\ = \frac{e}{2}.$$

$$(\Gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln n - n + \frac{\theta}{12n}}{n \ln n} \\ = 1.$$

§ 11. 用多项式逼近连续函数

1° 拉格朗日插入公式 拉格朗日多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} y_i$$

具有性质 $P_n(x_i) = y_i (i=0, 1, \dots, n)$.

2° 伯恩斯坦多项式 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则 伯恩斯坦多项式

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在闭区间 $[0, 1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

3121. 作出经过下列数组

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

的最低的 n 阶多项式 $P_n(x)$.

$$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$$

近似地等于什么?

解 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5;$

$$y_0 = 5, y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = 1.$$

$$\begin{aligned} P_3(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3. \end{aligned}$$

以 $(x_i, y_i) (i=0, 1, 2, 3)$ 代入上式, 化简即得

$$P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3.$$

$$P_3(-1) = 1 + \frac{55}{21} - \frac{1}{14} - \frac{5}{42} \doteq 3.43,$$

$$P_3(1) = 1 - \frac{55}{21} - \frac{1}{14} + \frac{5}{42} \doteq -1.57,$$

$$P_3(6) = 1 - \frac{110}{7} - \frac{18}{7} + \frac{180}{7} \doteq 8.43.$$

3122. 写出经过三点: $A(x_0-h, y_{-1}), B(x_0, y_0), C(x_0+h, y_1)$ 的抛物线方程

$$y = ax^2 + bx + c$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式, 即得

$$\begin{aligned} y = & \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1} \\ & + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0 \\ & + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1 \\ = & y_0 + \frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0) + \frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2} \end{aligned}$$

$$\cdot (x-x_0)^2.$$

3123. 利用数值 $x_0=1, y_0=1, ; x_1=25, y_1=5; x_2=100, y_2=10$, 推出开平方根: $y=\sqrt{x}$ ($1\leq x\leq 100$) 的近似公式.

解 $y=\sqrt{x}$ 的近似公式可由拉格朗日插入公式求出:

$$\begin{aligned} y &\doteq \frac{(x-25)(x-100)}{(-24)\cdot(-99)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-100)}{24\cdot(-75)} \cdot 5 \\ &\quad + \frac{(x-1)(x-25)}{99\cdot 75} \cdot 10 \\ &= 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2. \end{aligned}$$

例如,

$$x=4, y \doteq 1.564 (\text{应为 } 2);$$

$$x=9, y \doteq 2.463 (\text{应为 } 3);$$

$$x=16, y \doteq 3.637 (\text{应为 } 4);$$

$$x=36, y \doteq 6.447 (\text{应为 } 6);$$

由此看来, 误差还较大.

3124. 利用数值

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1,$$

推出如下的近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90).$$

利用这个公式, 近似地求:

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ.$$

解 将 $x=30, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; x=90, \sin 90^\circ = 1$ 代入近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3,$$

即得联立方程组

$$\begin{cases} 30a + 27000b = \frac{1}{2} \\ 90a + 729000b = 1. \end{cases}$$

解之,得

$$a = \frac{5}{288}, b = -\frac{5}{288} \left(\frac{1}{150} \right)^2.$$

因此,

$$\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right].$$

由此近似公式,可得

$$\sin 20^\circ \approx 0.341, \sin 40^\circ \approx 0.645, \sin 80^\circ \approx 0.994,$$

这与查表所得的

$$\sin 20^\circ = 0.3420, \sin 40^\circ = 0.6428, \sin 80^\circ = 0.9848 \text{ 近似.}$$

3125. 取数值 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 作拉格朗日多项式的插值点, 对函数 $f(x) = |x|$ 作出在闭区间 $[-1, 1]$ 上的拉格朗日插入多项式.

解 以 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, y_i = 0, \frac{1}{2}, 1$ 代入拉格朗日插入式, 即得

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\left(-\frac{1}{2} \right) (-1) \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \\ & + \frac{x \left(x + \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x(x-1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)} \cdot 1 \\
& + \frac{x(x+1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} \cdot 1 \\
& = \frac{x^2}{3}(7-4x^2) \quad (|x| \leq 1),
\end{aligned}$$

此即所求的多项式.

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似地计算

$$\int_0^2 y(x) dx,$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

$$\begin{aligned}
\text{解 } y(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)} \cdot 5 \\
&+ \frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1) \cdot (-1.5)} \cdot 4.5 \\
&+ \frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1 \cdot 0.5(-0.5) \cdot (-1)} \cdot 3 \\
&+ \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5)} \cdot 2.5 \\
&+ \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 0.5} \cdot 5 \\
&= \left(\frac{10}{3}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + \frac{87.5}{3}x^2 - \frac{62.5}{3}x + 5\right) \\
&+ (-12x^4 + 54x^3 - 78x^2 + 36x) + (12x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -48x^3 + 57x^2 - 18x) + (-\frac{20}{3}x^4 + \frac{70}{3}x^3 \\
& -\frac{70}{3}x^2 + \frac{20}{3}x) + (\frac{10}{3}x^4 - 10x^3 + \frac{27.5}{3}x^2 \\
& - 2.5x) \\
& = \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 y(x) dx &= \int_0^2 (\frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5) dx \\
&= (\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x) \Big|_0^2 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3127. 对于函数 x, x^2, x^3 , 试在闭区间 $[0, 1]$ 上作出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

解 对于函数 $f(x) = x$, 其白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x [x + (1-x)]^{n-1} = x;
\end{aligned}$$

对于函数 $f(x) = x^2$, 其白恩什坦多项式为

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1^2}{n^2} C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} \\
&\quad + \frac{3^2}{n^2} C_n^3 x^3 (1-x)^{n-3} \\
&\quad + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + \frac{n^2}{n^2} C_n^n x^n \\
&= \frac{1}{n} x (1-x)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{n} x^2 (1-x)^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{n} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^3 (1-x)^{n-3} \\
& + \cdots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} x^{n-1} (1-x) + x^n \\
& = \frac{1}{n} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) \\
& \quad x^2 \cdot (1-x)^{n-2} + \frac{3}{n} (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) x^3 (1-x)^{n-3} \\
& \quad + \cdots + \frac{n-1}{n} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) \\
& \quad + x^n - \left[\frac{1}{n} C_{n-1}^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} C_{n-1}^2 x^2 \right. \\
& \quad \left. (1-x)^{n-2} + \cdots + \frac{n-1}{n} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} (1-x) \right] \\
& = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \cdot x^k (1-x)^{n-k} - \frac{n-1}{n} x (1-x) \\
& \quad \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} \\
& = x - \frac{n-1}{n} x (1-x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

对于函数 $f(x)=x^3$, 其白恩什坦多项式为

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^k \\
&= \frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^0 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^1 x^2 (1-x)^{n-2} \\
& \quad + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-2} x^{n-1} (1-x) + x^n \\
&= \frac{1^2}{n^2} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} \\
& \quad (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 \cdot (1-x)^{n-2} + \cdots \\
& \quad + \frac{(n-1)^2}{n^2} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) + x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^2 x^2(1-x)^{n-2} \right. \\
& \quad \left. + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} \cdot (1-x) \right] \\
& = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
& \quad \cdot \left[\frac{1}{n-2} C_{n-2}^0 (1-x)^{n-2} + \frac{2}{n-2} C_{n-2}^1 x(1-x)^{n-3} \right. \\
& \quad \left. + \cdots + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^{n-2} x^{n-2} \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
& \quad \cdot \left[\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
& \quad \cdot \left[\frac{x}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k (x^k 1-x)^{n-3-k} + 1 \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
& \quad \cdot \left(\frac{x}{n-2} + 1 \right) \\
& = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) x^3 + \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n^2} x.
\end{aligned}$$

3128. 对于在闭区间 $[a, b]$ 上的已知函数 $f(x)$, 写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 令 $a + (b-a)y = x$, 则当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $a \leq x \leq b$, 此

时

$$y = \frac{x-a}{b-a}, 1-y = \frac{b-x}{b-a},$$

$$f(x) = f(a + (b-a)y),$$

故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的白恩什坦多项式为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

3129. 在闭区间 $[-1, 1]$ 上用白恩什坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数

$$f(x) = \frac{|x|+x}{2}.$$

作出函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形.

解 利用 3128 题的结果, 易得

$$\begin{aligned} B_4(x) &= \sum_{k=0}^4 f\left(-1 + \frac{k}{2}\right) C_4^k \cdot \frac{(x+1)^k (1-x)^{4-k}}{2^4} \\ &= \frac{1}{2} C_4^3 \cdot \frac{(x+1)^3 (1-x)}{2^4} + 1 \cdot C_4^4 \cdot \frac{(x+1)^4}{2^4} \\ &= \frac{1}{8} (1-x)(1+x)^3 + \frac{1}{16} (1+x)^4. \end{aligned}$$

函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形如图 5.9 所示.

$$\text{注: } y = B_4(x) = \frac{1}{8} (1-x)(1-x)^3 + \frac{1}{16} (1+x)^4$$

当 $x = -1$ 时为 0; 当 $x = 1$ 时为 1; 当 $x = 0$ 时为 $\frac{3}{16}$.

又 $y' = \frac{(1+x)^2}{4} (2-x)$, 当 $x = -1$ 时, $y' = 0$; 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $y' > 0$, 故图形上升.

$$y'' = \frac{3}{4} (1-x^2) \geq 0, \text{ 故图形向上凹.}$$

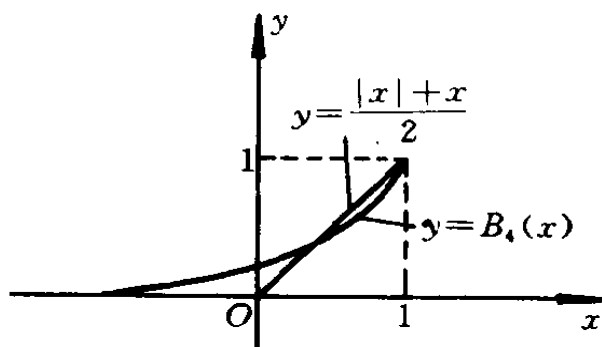


图 5.9

3130⁺. 在 $-1 \leq x \leq 1$ 内用偶次的白恩什坦多项式逼近函数

$$f(x) = |x|$$

解 利用 3128 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} B_{2^n}(x) &= \sum_{k=0}^{2^n} \left| -1 + \frac{k}{n} \right| C_{2^n}^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{2^n-k}}{2^{2^n}} \\ &= \frac{1}{2^{2^n}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2^n}^k (x+1)^k (1-x)^{2^n-k} + \sum_{k=n+1}^{2^n} \frac{k-n}{n} C_{2^n}^k \right. \\ &\quad \cdot (x+1)^k (1-x)^{2^n-k} \Big\} \\ &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2^n}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{2^n} \frac{k-n}{n} C_{2^n}^k \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} \Big\} \\ &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{2^n-k}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n+k}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-k} \right\} \\ &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n-k}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n}^{n+k} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k \}.$$

由于

$$\begin{aligned} C_{2^n}^{n-k} + C_{2^n}^{n+k} &= C_{2^n}^{n-k} \left[1 + \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)} \right] \\ &= 2C_{2^n}^{n-k}, \end{aligned}$$

故 $C_{2^n}^{n-k} = C_{2^n}^{n+k}$. 因此, 可得

$$B_{2^n}(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{k=1}^n \left\{ k C_{2^n}^{n-k} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right] \right\}.$$

3131. 对于函数

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b)$$

写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } B_n(x) &= \sum_{j=0}^n e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})} C_n^j \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n e^{k\frac{(b-a)j}{n}} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} (x-a) + (b-x) \right]^n \\ &= e^{ka} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[(e^{\frac{b-a}{n}k} - 1) \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x+x-a}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[1 + (e^{\frac{b-a}{n}k} - 1) \frac{x-a}{b-a} \right]^n. \end{aligned}$$

3132. 在闭区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 对于函数 $f(x) = \cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

解 我们有

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}). \quad (1)$$

利用 3131 题的结果(在其中令 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$), 得 e^{ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 e^{-ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为:

$$B_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}i} \left[1 + (e^{\frac{i\pi}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n,$$

$$B_n^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}i} \left[1 + (e^{-\frac{i\pi}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n.$$

于是,

$$\begin{aligned} B_n^{(1)}(x) &= e^{-\frac{\pi}{2}i} \left\{ e^{\frac{\pi i}{2n}} \left[e^{-\frac{\pi i}{2n}} + (e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{-\frac{\pi i}{2n}}) \cdot \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}^n \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{\frac{\pi}{2}i} \left[\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n} + 2i \sin \frac{\pi}{2n} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]^n \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n. \end{aligned}$$

同理可得

$$B_n^{(2)}(x) = \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n.$$

于是, 根据(1)式, 即知 $\cos x \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{1}{2} [B_n^{(1)}(x) + B_n^{(2)}(x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

应当指出,我们也可不利用(1)式以及 3131 题的结果,而利用 3128 题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) C_n^k \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n-k}}{\pi^n} \\ &= \sum_{k=0}^n \sin \frac{k\pi}{n} C_n^k \frac{(\pi + 2x)^k (\pi - 2x)^{n-k}}{(2\pi)^n}, \end{aligned}$$

这是 $B_n(x)$ 的另一表示式.

3133. 证明:在闭区间 $[-1, 1]$ 上, $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2i)} (1-x^2)^i.$$

证 $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-t}$, 其中 $t = 1-x^2$.

我们知道,函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\begin{aligned} \sqrt{1-t} &= 1 + \frac{1}{2}(-t) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \cdot (-t)^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)(-3) \cdots (-2n+3)}{n! 2^n} (-1)^n t^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} (-1)^{2n-1} t^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 < t < 1). \end{aligned} \tag{1}$$

当 $t = \pm 1$ 时,上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (\pm 1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} > 1, \end{aligned}$$

故由拉阿伯判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而级数

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛. 因此, 由幂级数的亚伯耳定理知, (1) 式当

$t = \pm 1$ 时也成立, 即有

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 \leq t \leq 1). \quad (2)$$

于是, 将 $t = 1 - x^2$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} |x| &= 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (3)$$

证毕.

注 由幂级数的性质知 (2) 式右端的级数在 $0 \leq t \leq 1$ 上一致收敛 (实际在 $-1 \leq t \leq 1$ 上也一致收敛), 故 (3) 式中的级数在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致收敛. 因此, 我们实际证明了更强的结论: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致趋于 $|x|$.

3134. 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的连续函数而 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 是它的福里叶系数. 证明菲叶耳三角多项式

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

证 首先指出, 本题结论有误, 有所设条件下, 只能断定: 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 而一般推不出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 但若再假定 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今证于下. 首先, 以 $f(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上的函数值为基础按 2π 为周期将函数 $f(x)$ 延拓到整个 $(-\infty, +\infty)$ 上, 延拓后的函数仍记为 $f(x)$ (注意, 若原来 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则延拓后的函数在 $x = \pi$ 的函数值不等于原来的函数值 $f(\pi)$, 但一个点的函数值对于下面各积分之值毫无影响). 用 $S_n(x)$ 表 $f(x)$ 的福里叶级数的部分和, 则

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x) \right] du. \end{aligned}$$

将 n 个等式

$$2 \sin \frac{v}{2} \cos mv = \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) v - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) v \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

相加得

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mv = \frac{\sin(2n+1) \frac{v}{2}}{2 \sin \frac{v}{2}},$$

从而(作代换 $u-x=t$)

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

由于周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda, \lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} F(u)du$ 与 λ 无关, 故上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 由此, 再将 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表为 $\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$, 并在 $\int_{-\pi}^0$ 中作代换 $t=-s$, 即得表达式

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

显然 $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$, 故

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \\ &\quad \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

由于

$$2\sin\frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})t$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t] \\
&= 1 - \cos nt = 2\sin^2 \frac{nt}{2}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \\
&\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \quad (1)
\end{aligned}$$

特别在(1)式中,令 $f(x) \equiv 1$, 则显然这时 $S_n(x) \equiv 1$, 从而 $\sigma_n(x) \equiv 1$, 因此得下面的等式:

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \quad (2)$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$, 得

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(x) - f(x) \\
&= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \\
&\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \quad (3)
\end{aligned}$$

由(3)式证明下述两结论:

i) 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

ii) 若更设 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证 i). 设已给 $\eta > 0$. 显然, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

上有界,故存在常数 $M>0$,使

$$|f(x)| \leq M (-\infty < x < +\infty).$$

注意,延拓后的函数在点 $x=\pi, x=-\pi$ 可能不连续, (可能有第一类间断点),但在 $-\pi < x < \pi$ 上肯定是连续的,因此,在 $\left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$ 上必一致连续. 于是,对任给的 $\varepsilon > 0$,必有 $\delta > 0$ 存在,使对于闭区间 $\left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$ 上任何两点 x', x'' ,只要 $|x' - x''| \leq \delta$,就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$\tau = \min \left\{ \delta, \frac{\eta}{2} \right\}.$$

根据(3)式,有

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [f(x+t) - f(x) + f(x-t) \\ &\quad - f(x)] \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2n\pi} \int_\tau^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \\ &\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt = I_1 + I_2; \end{aligned} \quad (4)$$

显然,当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时,有 $x+t \in \left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$, $x-t \in \left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$,

从而

$$|f(x+t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x-t)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此〔再注意到(2)式〕, 当 $-\pi+\eta \leq x \leq \pi-\eta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [|f(x+t)-f(x)| + |f(x-t) \\ &\quad - f(x)|] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^\tau \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

另一方面, 当 $\tau \leq t \leq \pi$ 时, 有

$$\left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}}.$$

于是, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} \int_\tau^\pi 4M dt \\ &< \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

由(4)、(5)、(6)诸式可知: 当 $-\pi+\eta \leq x \leq \pi-\eta$ 时, 有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}} (n=1, 2, \dots).$$

令 $N = \left\lceil \frac{4M}{\varepsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [-\pi$

$+\eta, \pi-\eta]$, 恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此可知, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

再证 ii), 若原来给定的 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是整个 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 因此, 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上必一致连续. 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 必有 $\tau > 0$ 存在, (可取 $\tau < \pi$), 使对于 $[-2\pi, 2\pi]$ 中任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \tau$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

以下的证明和 i) 对应部分类似. 首先, 对刚才确定的 τ , 写出 (4) 式. 显然, 当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 时, 有 $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$, $x-t \in [-2\pi, 2\pi]$, 故

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而, 当 $-\pi \leq x \leq \pi$ 时 (5) 式成立. 同样 (6) 式成立. 于是, 当 $n > N = \left\lceil \frac{4M}{\varepsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$ 时, 对一切 $x \in [-\pi, \pi]$,

恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

最后, 我们举例说明, 若 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则一般不能断定 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 例如, 设

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

我们证明这时的 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上不一致收敛于 $f(x)$. 用反证法, 假定 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上一致收敛

于 $f(x)=x$. 由福里叶级数的收敛性定理(即迪里黑里定理)知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (7)$$

这里

$$S(x) = \begin{cases} f(x) = x, & \text{当 } -\pi < x < \pi \text{ 时,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0, & \text{当 } x = \pm\pi \text{ 时,} \end{cases}$$

由此可知, $S(x)$ 在点 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续, 但另一方面, 根据(7)式, 利用 138 题的结果知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (8)$$

由反证法的假定, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$ (在 $-\pi < x < \pi$ 上, $f(x)=x=S(x)$). 而由(8)式, 当 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 时, $\sigma_n(x)$ 也收敛于 $S(x)$, 故知 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$. 显然, $\sigma_n(x)$ 都是 x 的连续函数 ($-\pi \leq x \leq \pi$), 由此可知, 极限函数 $S(x)$ 也必在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上连续; 此与 $S(x)$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续的事实矛盾, 此矛盾证明了 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上收敛于 $f(x)=x$ 不是一致的.

本题全部证毕.

3135. 对于函数

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

作出菲叶耳多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1} \right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1} \right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$